

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México, México. No. 5. Julio-Diciembre 2021

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Exégesis sobre los elementos de teoría de la enumeración.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola .**
Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Diseño experimental factorial 2^3 para la determinación de valores óptimos en la producción de joyería de plata**
Leopoldo Viveros Rosas, Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández, José Roberto Pérez Torres, Juan Barragán Aguilar.
- **Análisis y descripción de fenómenos determinísticos y probabilísticos. Cáncer y seguridad ciudadana.**
Isa Massa, Fernando Gustavo.
- **Diseño y construcción de un controlador de presurización PID.**
Marcos Fajardo Rendón.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Efraín Valencia Calzadilla
Sealtiel Pichardo Jiménez
Gregorio Montes de Oca Godinez
Areli Guadalupe Mateos Sanchez

COMITÉ CIENTÍFICO

Vitaliano Acevedo Silva
Marleny Hernández Escobar
Enrique Salazar Peña
María de Jesús Sentiés Nacaspac
Raciel Trejo Reséndiz

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 5, Julio-Diciembre 2021 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 14 de julio de 2021.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 5.

Julio-Diciembre de 2021

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 5, julio-diciembre de 2021, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Exégesis sobre los elementos de teoría de la enumeración.	8
<i>Exegesis on the elements of enumeration theory.</i> <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	
Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola .	11
<i>Quadratic equations solving description through representation of its vertex parabola.</i> <i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Diseño experimental factorial 2^3 para la determinación de valores óptimos en la producción de joyería de plata.	18
<i>2^3 factorial experimental design for determination of optimal values in silver jewelry production.</i> <i>Leopoldo Viveros Rosas, Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández, José Roberto Pérez Torres, Juan Barragán Aguilar.</i>	
Análisis y descripción de fenómenos determinísticos y probabilísticos. Cáncer y seguridad ciudadana.	15
<i>Analysis and description of deterministic and probabilistic phenomena. Cancer and citizen security</i> <i>Isa Massa, Fernando Gustavo.</i>	
Diseño, modelado y construcción de un controlador de presurización PID .	21
<i>Design, modeling and construction of a PID pressurization controller</i> <i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

CARTA DEL EDITOR

Hemos seleccionado de nuestro acervo bibliográfico dos publicaciones una de ellas de forma periódica mensual, escritas por matemáticos y divulgadores de las matemáticas y que han escrito mucho material valioso en esta rama del conocimiento, tanto en los centros de investigación como en las aulas universitarias o de educación elemental. Como ha sido nuestro distintivo, los años de publicación de estas obras han sido aquellos cuya secuencia de días en el calendario es congruente con este 2021.

El Profr. Dr. Reinhard Schertz, de la Universidad de Augsburgo en Alemania, nació el miércoles 7 de abril de 1943 en plena Segunda Guerra Mundial en la ciudad de Praga entonces Checoslovaquia y actualmente República Checa. Hijo del químico graduado Günter Schertz y de la señora Rosina Jürschik. Al disolverse el matrimonio en 1947 Reinhard permanece al lado de su madre. Inicia su educación elemental en la Pascua de 1949 (Nota editorial: hemos calculado que la luna llena correspondiente al mes de abril de ese año fue el miércoles 13, por lo que el viernes de Pascua fue el 15 de ese mes) y la concluyó en febrero de 1964 al recibir su certificado de terminación de estudios secundarios en la Escuela Secundaria Estatal de Colonia, Alemania (Nota editorial: en Alemania, la educación secundaria incluía la educación media superior). Inició sus estudios universitarios en el área de matemáticas en la Universidad de Colonia y presenta su examen preliminar para obtener su diploma de Matemático durante el semestre invernal de 1968/69 y desde 1966 estuvo en la cátedra del Prof. Dr. C. Meyer de quien también fue su asistente estudiantil. Asistió a las conferencias de los Profesores Doctores Bulirsch, Harzheim, Jehne Kirchner, König, Mennicken, C. Meyer, Mittelstaadt, Pfanzagl, Schäfke, Schönhage y Schröder.

En noviembre de 1971 publica su tesis doctoral que le permitió obtener el grado de Doctor en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales de la Universidad de Colonia titulada: "Una nueva justificación a los resultados de Weber utilizando los valores singulares de las funciones de módulo $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \tau_2, \tau_3$ y la prueba de las dos conjeturas de Weber" publicada en lengua alemana. Su investigación trata sobre los valores singulares de las funciones consideradas por H. Weber en su obra titulada "Libro de Álgebra, Tomo 3, editado por Braunschweig, 1908 y traducido al inglés y publicado en 1962 y en las que se consideran las siguientes funciones: $\zeta(w), \zeta_1(w), \zeta_2(w), \tau_2(w), \tau_3(w)$. El propósito principal de su trabajo es ofrecer una nueva justificación a los resultados ya demostrados por Weber, además de proponer una prueba a las dos conjeturas presentadas por este autor, y dar respuesta a algunos planteamientos abiertos en el trabajo de Weber. Detalla la problemática presentada por Frege: Para un número imaginario α en el semiplano superior, el valor de la función $j(\alpha)$ de las invariantes absolutas $j(w)$ en el punto $w = \alpha$ es un número algebraico completo. Una consecuencia es que también se le asocia a $j(\alpha)$ un valor singular de $j(w)$. Los cuerpos generados por los valores singulares de $j(w)$ son completamente conocidos. Se asigna una directriz para el anillo multiplicador de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ (abreviada directriz de α) por lo que $P(\alpha, j(\alpha))$ es un campo de clase anillo módulo f sobre $P(\alpha)$ y $P(\alpha, j(\alpha))$ es el subcampo real máximo de campos conjugados. Sea P el campo de los números Racionales y \mathbb{Z} el anillo de los números racionales enteros. Esto se ha demostrado cuando $f = 1$, primero por Weber y después por Hasse, para toda directriz natural f . El campo de la función $P(g(w))$, generado por una función weberiana $g(w)$ es algebraico sobre $P(j(w))$ y es consecuencia de las expresiones propuestas por Weber:

$$\tau_2 w^3 = j(w)$$

$$\tau_3 w^2 = j(w) - 12^3$$

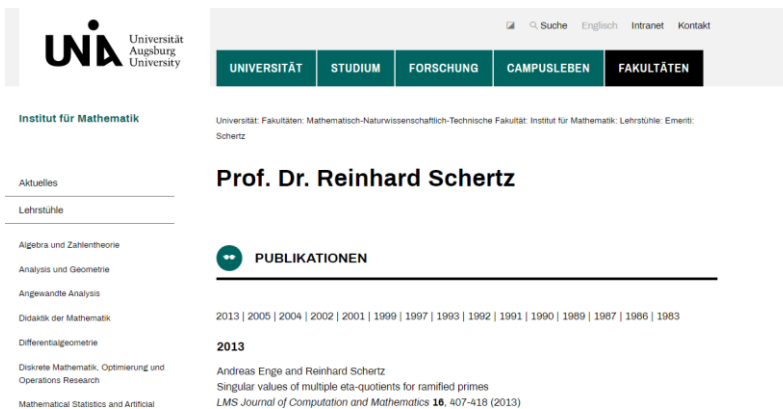
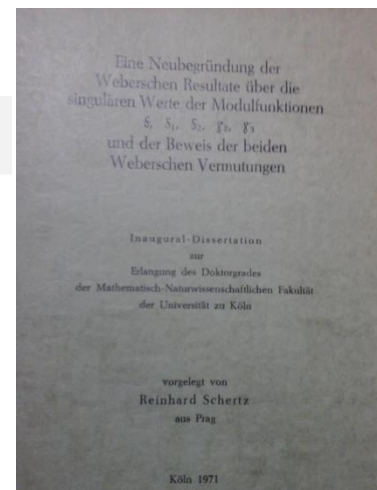
$$\tau_2(w) = \frac{\zeta(w)^{24} - 16}{\zeta(w)^8} = \frac{\zeta_1(w)^{24} + 16}{\zeta_1(w)^8} = \frac{\zeta_2(w)^{24} + 16}{\zeta_2(w)^8}$$

De acuerdo con esto, los valores singulares $g(\alpha)$ son números algebraicos en particular y por tanto se conserva la siguiente expresión: $P(j(\alpha)) \subseteq P(g(\alpha))$. Pero se tiene la siguiente desigualdad: $[P(g(\alpha)) : P(j(\alpha))] \leq [P(g(w)) : P(j(w))]$. El Dr. Schertz hace notar que en casos como este es donde aparece el signo de desigualdad real y que con buenos argumentos axiomáticos se cumple α inclusive en el caso $P(j(\alpha)) = P(g(\alpha))$.

Según Weber se denomina invariante de clase $g(\alpha)$. Continúa su investigación al relacionar estos argumentos con el estudio de las ecuaciones cuadráticas y particularmente con su discriminante definido en las clases de invariantes modulares. Su investigación incluye los siguientes capítulos: a) antecedentes de la Teoría modular, b) Antecedentes de la Teoría de Clase de Campos; c) Antecedentes de la Teoría de Funciones; d) Sobre las Potencias de los valores singulares; e) Una breve prueba de los resultados principales de las potencias de los valores singulares; f) Prueba de la primera conjetura de Weber para los argumentos

$$\alpha = \sqrt{-m} \mid m \in \mathbb{Z}, m > 0, m \equiv 3(\text{mod})8, \text{ de C. Meyer.}$$

Es bastante amplia la producción académica del Dr. Schertz. Se puede consultar la siguiente dirección electrónica: <https://www.uniaugsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/prof/emeriti/schertz/>

En el mes de octubre de 1976 se publica el primer fascículo de la revista Investigación y Ciencia, versión castellana de American Scientific Magazine. Editada en la ciudad de Barcelona,

España esta publicación ha tenido el propósito de divulgar el conocimiento científico mundial en lengua castellana. Ramas del conocimiento científico como son la astronomía, la medicina, la biología, la física, la química, la economía, las ciencias de la computación, la matemática entre otras han sido los temas que mes con mes se dan a conocer a partir de aquel año.

De todas las interesantes secciones de la revista, destacan la denominada Taller y laboratorio que después se convirtió en Curiosidades de la Física y la sección Juegos Matemáticos, que no ha dejado de publicarse desde entonces, con algunos lapsos que dieron paso a las ciencias de la computación (situación que en American Scientific magazine dejó de publicarse hace bastante tiempo).

Este mes de diciembre de 2021 se publicó el número 543 y la portada, como conmemoración es la misma a la de aquella de octubre de 1976. Han sido muchos los nombres de prestigiosos investigadores que han colaborado en la revista, en las diversas ramas de la ciencia y la matemática y la tecnología. Nos centramos en recordar aquellos nombres que han colaborado en la sección Juegos Matemáticos. Es Martin Gardner, prestigiado divulgador de la matemática quien encabeza la lista de colaboradores de esta sección. Su primer artículo de tituló “La base combinatoria del I Ching, el libro chino de la adivinación y la sabiduría”, en el que describe y analiza profundamente el propósito del libro descrito generando un gran recurso didáctica para abordar los axiomas de la teoría de la enumeración o teoría de la combinatoria.

Este gran divulgador de la matemática continuo escribiendo para esta sección hasta diciembre de 1981. A partir de enero de 1982 los substituye Douglas R. Hofstadter quien propone que la sección se denomine Temas Metamágicos (para disgusto de muchos, desde luego). Su primera publicación se denominó “Los atractores extraños son configuraciones matemáticas en equilibrio entre orden y caos”.

Para el mes de octubre de 1983 regresa la colaboración de Martin Gardner y su sección Juegos Matemáticos con el artículo “Tareas que es forzoso concluir, por mucho que se quiera evitarlo” aunque solo colabora este mes y el siguiente.

Para diciembre de ese año, se inaugura la sección Juegos de Ordenador (también para disgusto de muchos) con Brian Hayes como colaborador. Su primer artículo se tituló “Donde se presenta una sección fija dedicada a los placeres de la computación”.

Para mayo de 1984, el colaborador para esta sección es Fred Gruenberger con el artículo “De cómo manejar números de miles de cifras , y de por qué nos es necesario”.

Para el mes de julio de ese año, empieza la colaboración de A. K. Dewdney con el artículo “El juego de la guerra nuclear , dos programas hostiles entablan batallas de bits”. En diciembre de 1984 escribe Yank D. Weed con la colaboración “Un jardín informático donde brotan programas, hierbajos y pangramas”.

En enero de 1985 retoma A. K. Dewdney con la colaboración titulada “Ying y Yang: recurrencia o iteración, la Torre de Hanoi y las argollas chinas”. En octubre de 1990 regresa la sección Juegos Matemáticos a cargo del también prestigiado divulgador Ian Stewart y para beneplácito de muchos de nosotros con su artículo “Sofá de Conway y área máxima del contorno que puede doblar el ángulo de un pasillo”. (Nota editorial: Tiempo después, en el número 411 de

diciembre de 2010, Agustín Rayo escribiría en esta sección una continuación de esta continuación en el artículo “El juego de la vida. Un clásico de John Conway popularizado por Martin Gardner”). Este prestigiado autor colaboró hasta mayo de 2001, y ha sido uno de los mejores relevos de Martin Gardner, en lengua inglesa. Para junio de ese año, 2001, inicia la colaboración Manuel M. Ritoré Cortés con su artículo “Geometría de las pompas de jabón”, además es el primer autor que escribe en lengua castellana para esta sección de la revista. En julio de 2001 inicia su colaboración en esta sección Juan M. N. Parrondo con el artículo “Perder + perder = ganar. Juegos de azar paradójicos. Para el número 383 del mes de agosto de 2008 empieza a escribir Agustín Rayo con el artículo titulado “El duelo de los números grandes. ¿Cuál es el número más grande que puede escribirse en una pizarra?”. En enero de 2013 Gabriel Uzquiano colabora en esta sección con su artículo “Riesgos del razonamiento intuitivo. ¿Cómo razona usted?”. En los meses de abril y junio de ese año A. Pérez Carballo colabora con el artículo “Probabilidad cero. El análisis no estándar y la Teoría de la probabilidad” y “Dilemas cooperativos e inducción hacia atrás. ¿Qué ocurre al iterar múltiples veces el dilema del prisionero?”. Para el mes de mayo, en el número 440 toca el turno a Bartolo Luque con su artículo “Todo o nada. Leyes cero – uno, fenómenos de umbral y transiciones de fase”. En julio de 2013 Geoffrey B West escribe el artículo “Comprender la complejidad”. Para el mes de agosto A. Pérez Carballo retoma la sección con su artículo “Inducción hacia atrás (2)”. En septiembre escribe Gabriel Uzquiano el artículo “Preguntas y respuestas. Cómo utilizar los códigos de Hamming para incrementar las probabilidades de éxito”. En octubre de ese 2013 vuelve a la sección Bartolo Luque con su artículo “Demostraciones visuales”. Las colaboraciones son alternadas de los autores mencionados para los años 2014, 2015. En abril de 2016 toca el turno a Francine F. Abeles con su colaboración titulada “El legado matemático de Lewis Carroll “. En los siguientes meses continúa con la sección nuevamente A. Pérez Carballo. En enero de 2017 escribe Bartolo Luque y en febrero se invita a participar a Michael Joswig con el artículo “La travesura juvenil de una medallista Fields”. Para marzo vuelve a participar A. Pérez Carballo con el artículo “Están conectados los números naturales y los infinitos?”. En abril de ese año es invitada a participar a Ericka Klarreich quien escribe “Un algoritmo para repartir una tarta”. En agosto participa Jean- Paul Delahaye con el artículo “Lo veo, lo demuestro, pero...¿lo entiendo? Hasta finales de 2018 y durante 2019, 2020 y los meses de enero a marzo y de julio, septiembre, octubre, noviembre y diciembre de este 2021 sigue escribiendo Bartolo Luque en la sección. En abril es invitado a colaborar Jean-Paul Delahaye con el artículo titulado “Los secretos del número 42. En el mes de agosto toca el turno a Natalie Wolchover con la colaboración titulada “Así funciona el Teorema de Gödel”.

Es necesario mencionar que todos los colaboradores de esta sección Juegos Matemáticos han tenido una participación realmente exitosa en sus colaboraciones. Incluimos las imágenes de la felicitación por parte de uno de los editores a sus homólogos de esta revista, la portada de la primera publicación en octubre de 1976 y la portada de este mes de diciembre. Los editores han anunciado que a partir de enero de 2022, la publicación será únicamente en línea, dando por finalizada la tradicional edición en papel, en beneficio de los árboles que son tan importantes y necesarios en la actualidad.

Para este número, hemos incluido los siguientes artículos. En la sección Objetos Matemáticos aparece la colaboración “Exégesis sobre los elementos de Teoría de la Enumeración”, a propósito de la colaboración de Martin Gardner en la primera revista Investigación y Ciencia, titulada “La base combinatoria del I Ching, el libro chino de la adivinación y la sabiduría”. Enseguida

está el artículo “Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola”. En la sección Objetivos matemáticos hemos seleccionado tres colaboraciones “Diseño experimental factorial 2^3 para determinación de valores óptimos en la producción de joyería de plata”; “Análisis y descripción de fenómenos determinísticos y probabilísticos. Cáncer y seguridad ciudadana” “Diseño y construcción de un controlador de presurización PID”.

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA

FRANCISCO GUILLERMO - 13/12/2021 08:35

Enhorabuena por estos 45 años de publicaciones. Aquí en la Ciudad de México hace tiempo que no llega la revista en papel. En aquellos años la distribuía una sucursal de la revista en la Calle de Orizaba, colonia Roma y también se conseguía en la cadena de tiendas de los tres búhos, pero la dejó de importar, es una lástima. He sido lector fiel de la revista y tengo en papel este primer número y muchos otros más. Afortunadamente existe la tecnología digital y sigo siendo lector fiel de ustedes. En la revista conocí mucho de ciencia y matemática, me ha sido de gran utilidad en mi vida estudiantil y profesional. En ella conocí el trabajo de Martin Gardner, gran divulgador de la matemática y gracias a sus artículos me contabilizo entre los muchos diletantes de la matemática. También aprendí muchas cosas que en los salones de clase no se estudiaban. Es para mí una publicación infaltable en mi biblioteca. Saludos desde la Ciudad de México. Felicidades y que cumplan otros muchos años más.

Añadir comentario

Contenido *



Las imágenes anteriores en ésta carta editorial pertenecen todos los derechos reservados a © Prensa Científica, S.A. y/o © Scientific american, a division of Nature America, inc.

Los editores.

Exégesis sobre los elementos de Teoría de la Enumeración.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- La teoría de la enumeración es parte de la teoría de la combinatoria y se ha desarrollado desde hace ya varios siglos, y debido al gran desarrollo en las ciencias de la computación en los últimos 50 años su desarrollo axiomático se ha ido consolidando también a la par. Este conocimiento matemático está fuertemente vinculado con la teoría de números, la geometría plana, la topología y el análisis matemático. En esta contribución describo algunos elementos importantes de esta rama del conocimiento, desde el punto de vista axiomático – deductivo e incluyo las pruebas que los justifican.

Palabras Clave- Enumeración, permutación, combinación, teorema del binomio.

Zusammenfassung- Die Aufzählungstheorie ist ein Teil der kombinatorischen Theorie und wird seit mehreren Jahrhunderten entwickelt und durch die große Entwicklung der Informatik in den letzten 50 Jahren auch gleichzeitig ihre axiomatische Entwicklung gefestigt. Dieses mathematische Wissen ist eng mit der Zahlentheorie, der ebenen Geometrie, der Topologie und der mathematischen Analyse verbunden. In diesem Beitrag beschreibe ich einige wichtige Elemente dieses Wissenszweigs aus axiomatisch-deduktiver Sicht und füge die sie begründenden Beweise bei.

Keywords- Aufzählung, Permutation, Kombination, Binomialsatz.

Резюме - Теория перечисления является частью комбинаторной теории и разрабатывалась в течение нескольких столетий, и, благодаря значительному развитию информатики за последние 50 лет, ее аксиоматическое развитие также было закреплено. Это математическое знание тесно связано с теорией чисел, геометрией плоскости, топологией и математическим анализом. В этой статье я описываю некоторые важные элементы этой области знания с аксиоматико-дедуктивной точки зрения и включаю доказательства, которые их оправдывают.

Ключевые слова - перечисление, перестановка, комбинация, биномиальная теорема.

Mathematical Subject Classification: 05A10

I. INTRODUCCIÓN

La teoría de la enumeración, conocida también como teoría combinatoria y para muchos autores sinónimo de matemática discreta ha tenido importantes avances en las últimas décadas, además de convertirse en un conocimiento que ha avanzado a la par de las ciencias de la computación. Sin embargo, no tiene mucho que George Polya la consideraba como un conocimiento experimental, como tradicionalmente lo fue el análisis matemático todavía a principios del siglo veinte. Las primeras formalizaciones de esta rama del conocimiento matemático surgieron como una necesidad para brindar explicaciones importantes en los juegos y los acertijos que interesaron mucho a investigadores como Gauss, Euler o

Hamilton, entre otros y no es de extrañarse esta afición en ellos, pues John Lighton Synge, matemático irlandés de principios del siglo anterior y cuya obra abarca el análisis tensorial y el desarrollo de la física matemática comentaba que la mente es más creativa cuando participa en los juegos. Actualmente todavía está en proceso la definición formal de esta rama de la matemática, pero su estudio se relaciona con el arreglo de los elementos de conjuntos y se vincula fuertemente con dos tipos de problemas: la enumeración (que analiza teoremas relacionados con las variaciones, las permutaciones, las combinaciones y consecuentemente el teorema del binomio) y la existencia (que analiza los métodos de prueba y demostración de enunciados matemáticos, analiza y desarrolla relaciones importantes entre elementos de la geometría plana, el mapeo sobre la esfera, los problemas de coloreo y las estructuras finitas). Sin embargo, en la presente contribución ofrezco comentarios relacionados con los elementos de la teoría de la enumeración.

II. EXÉGESIS

Def. 1.- $n! = \prod_1^n n \mid n \in 0 \cup \mathbb{Z}^+$, considerado un grupo Abeliano.

Def. 2.- Sea P la permutación de los elementos de un conjunto dado el mapeo de ese conjunto sobre sí mismo, es decir $P = (n!)(n-r)!^{-1} = P_r^n$.

Proposición 1.- La enumeración de distintas permutaciones de un conjunto de cardinalidad finita de n elementos, es $n!$ [1]

Prueba: Sea (a_1, a_2, \dots, a_n) un conjunto finito. Por el principio del buen orden, existen n opciones de arreglo para el primer elemento del conjunto; $n-1$ opciones de arreglo para el segundo elemento; $n-2$ opciones de arreglo para el tercer elemento, y así sucesivamente, hasta que exista una y sólo una opción de arreglo para el último elemento del conjunto finito; asociando multiplicativamente todas las opciones de arreglo, se tiene: $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n n = n!$ ■

Corolario 1.- Sean P_1, P_2 dos permutaciones sobre los elementos de un mismo conjunto. $P_1 \circ P_2$ representa la composición de mapeos de ambas permutaciones, cuyo resultado es la simple permutación sobre el conjunto equivalente a los resultados sucesivos de las permutaciones

P_1, P_2 . No se basa en la propiedad asociativa de la multiplicación en el Anillo conmutativo.

Prueba: Sea (a_1, a_2, a_3) un conjunto finito. El número de arreglos ordenados del conjunto citado es $P_3^3 = 6$, (Def. 2); existen seis mapeos o permutaciones: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, (llamada permutación de identidad I); $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$. Se tienen las permutaciones $I, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$. Se tiene $P_2 \circ P_4 = P_1$, por el principio del buen orden, se ha mapeado primeramente P_2 sobre $(a_1 \ a_2 \ a_3)$ y en seguida P_4 sobre el último resultado. Ahora $P_4 \circ P_2 = P_5$, conservando de la misma forma el principio del buen orden. Además, $P_2 \circ P_4 \neq P_4 \circ P_2$ ■

Proposición 2.- Si P_r^n representa el número de r - arreglos de n distintos elementos de un conjunto finito, entonces $P_r^n = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = n^{(r)}$.

Prueba: Existen r conjuntos a los pertenecen elementos, cada conjunto con un elementos seleccionado de n distintos. Por el principio del buen orden existen n opciones para el primer conjunto, $n-1$ para el segundo conjunto, \dots , $n-r+1$ opciones para el r -ésimo conjunto. Por la propiedad asociativa de la multiplicación sobre estas opciones, se tiene $n^{(r)}$.

Además, existen P_{r-1}^n arreglos ordenados de n diferentes elementos tomados $r-1$ a la vez, consecuentemente existen $n-r+1$ elementos restantes. Por la propiedad asociativa de la adición, al agregar uno de los elementos al último $(r-1)$ -arreglo, se tiene un r -arreglo, y cumple para todo r -arreglo. Finalmente, por la propiedad asociativa de la adición, el número total de r -arreglos de n distintos elementos en un conjunto es $(n-r+1)P_{r-1}^n = P_r^n$. Ahora, por el principio del buen orden, se reescribe:

$P_1^n = (n-0)P_0^n = n$; $P_2^n = (n-1)P_1^n$; $P_3^n = (n-2)P_2^n$; \dots $P_{r-2}^n = (n-r+3)P_{r-3}^n$; $P_{r-1}^n = (n-r+2)P_{r-2}^n$. Por propiedad asociativa de la multiplicación sobre los miembros correspondientes de estas igualdades, se obtiene el neutro multiplicativo en los factores comunes, para finalmente reescribir $P_r^n = (n-r+1)(n-r+2) \cdots (n-2)(n-1)n = n^{(r)}$ ■

Proposición 3.- El número total de arreglos de n distintos elementos de un conjunto tomados r a la vez con la condición de repeticiones ilimitadas permitidas, se expresa n^r .

Prueba: Consideremos el conjunto finito con n elementos. La primera opción corresponde a 1 elemento del ese conjunto. Para la segunda opción corresponde otro elemento de ese mismo conjunto. De la misma forma se tiene para la tercera opción. Por la propiedad asociativa de la multiplicación se tiene: n para el primer r -arreglo; para la segunda opción, n para el segundo r -arreglo; para la n -ésima opción, n para el r -arreglo, es decir $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$ ■

Proposición 4.- La cardinalidad de arreglos ordenado de n elementos de un conjunto dado, con la condición necesaria que

estos elementos formen una circunferencia, se representa $(n-1)!$.

Prueba: La condición necesaria sugiere el ordenamiento circular de los elementos del conjunto dado, por Euclides, Def. 15 y Postulado 3 describe la condición necesaria. Cualquier elemento del conjunto puede ocupar cualquier posición en la circunferencia. Por lo tanto existen $n-1$ opciones para ese primer elemento del conjunto; para el siguiente elemento colocado junto al primero y sobre la circunferencia existen $n-2$ opciones y para el siguiente elemento en este mismo orden, $n-3$ opciones. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, se tiene:

$$(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-r+1) = (n-1)! \quad \blacksquare$$

Proposición 5.- La cardinalidad de n -arreglos de n elementos de un conjunto finito dado, de los que existen un número p de una característica dada y un número q de otra característica dada, pero con la condición de que el resto son todos diferentes está expresada por $(n)!(p!q!)^{-1}$.

Prueba: Sea a la cardinalidad de arreglos; sean los n elementos del conjunto (a_1, a_2, \dots, a_n) con la condición p de poseer una característica dada, listados como a_1, a_2, \dots, a_p , y con la condición q de poseer otra característica dada, listados como $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+q}$. Existen $n!$ n -arreglos de estos elementos (con la condición de ser distintos) [por Def. 1, Proposición (1)]. Una consecuencia se expresa como $n! = ap!q!$, ya que para cada a arreglo requerido, la primera p condición, ya listada, se pueden intercambiar en $p!$ formas distintas, y la segunda q condición, también listada, también se pueden intercambiar en $q!$ formas distintas. ■

Proposición 6.- La cardinalidad de formas de realizar una selección no nula al escoger algunos o todos los elementos p_1, p_2, \dots, p_k , todos estos elementos con características diferentes y se expresan:

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1) - 1$$

Prueba: Por el principio del buen orden, los p_i elementos similares generan $p_i + 1$ subconjuntos para todo i -enésimo elemento debido a que es posible escoger $0, 1, 2, \dots, p_i$ elementos del subconjunto. Por la propiedad asociativa de la multiplicación tenemos $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$ y de este producto se debe aplicar la propiedad del inverso aditivo a una selección para así asegurar que se tiene al menos un elemento en cada una de las selecciones obtenidas, eliminando la posibilidad de no tener elementos del conjunto en cada k subconjunto. ■

Proposición 7.- Sea $C_r^n = (n^r)(r!)^{-1} \binom{n}{r}$ una combinación. [1]

Prueba: $\exists r!$ (Def. 1) de r -arreglos de la misma cardinalidad de r elementos de un conjunto dado. La cardinalidad de estos r -arreglos es $\frac{r!C_r^n}{r!} = P_r^n = n^{(r)}$ [Por propiedad del inverso multiplicativo en el Anillo de Enteros y Proposición (2)] ■

Def. 3.- $C_r^n = (n!)/((n-r)!r!)^{-1}$

Def. 4.- Sea $(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^n x^n y^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$ [2]*

Proposición 8.- Para todo elemento fijo n , siempre que $xy > 0$, el máximo término en la expansión de $(x+y)^n$ es el término $C_r^n x^{n-r} y^r$. Se tiene [1] la condición $r = \mathfrak{A}$ y representa el mayor entero $\leq \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} = (n+1)(x/y)^{-1}$.

Prueba: Consideremos que el $(r+1)$ -ésimo término en la expansión $(x+y)^n$ es $u_{r+1} = C_r^n x^{n-r} y^r$. De $(u_{r+1})/u_r = [(n+1)(r)^{-1} - 1][(y)(x)^{-1}]$, igualdad que tiene la condición de ser mayor que la unidad, como consecuencia de $\mathfrak{A} > r$, así que para el elemento fijo n , el factor $[(n+1)(r)^{-1} - 1]$ decrece mientras que r se incrementa.

III. CONCLUSIONES

Algunos elementos de la Teoría de la Enumeración comentados anteriormente poseen características importantes que permiten apoyar diversos enunciados en el conocimiento matemático. Berman y Fryer [1] escribieron una serie de Identidades en la Teoría de la Enumeración, y considero importante transcribirlas de la fuente original, a manera de conclusión de la presente colaboración, con la intención de divulgarlas para su posible uso académico, ya que la petición de los autores es probar dichas identidades.

Identidades de la Teoría de la Enumeración.

- 1) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.
- 2) $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
- 3) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + 2\binom{n}{5} + \dots = 3 \cdot 2^{n-1}$.
- 4) $\frac{1}{2}(x+1)^n + \frac{1}{2}(1-x)^n = 1 + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{4}x^4 + \dots$.
- 5) $\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \frac{3\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} + \frac{4\binom{n}{4}}{\binom{n}{3}} + \dots + \frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- 6) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0$.
- 7) $\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$.
- 8) $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + 7\binom{n}{3} + \dots = 2^n(n+1)$.

*Expresión matemática estudiada por B. Pascal en su tratado *Potestatum Numericarum Summa* (Sumas de potencias numéricas), que describe un procedimiento para calcular sumas de potencias. En la actualidad su resultado definitivo se puede expresar: $(k+1)\sum_{i=1}^n i^k = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \left[\binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^n i^j \right]$.

- 9) $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$.
- 10) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.
- 11) $\binom{n}{0}\binom{n}{r} + \binom{n}{1}\binom{n}{r+1} + \binom{n}{2}\binom{n}{r+2} + \dots + \binom{n}{n-r}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$.
- 12) $2\binom{n}{0} + \frac{2^2}{2}\binom{n}{1} + \frac{2^3}{3}\binom{n}{2} + \frac{2^4}{4}\binom{n}{3} + \dots = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

REFERENCIAS

- [1] Fryer K. D & Berman G.: *Introduction to Combinatorics*. Academic Press. N. Y. (1972).
 - [2] Knoebel A.: *Mathematical Masterpieces*. Springer Verlag. N. Y. (2007).
- Bibliografía complementaria.
- [3] Bona, M.: *Walk through combinatorics. An introduction to Enumeration and Graph Theory*. World Scientific Press. N. Y. (2011).
 - [4] Erdős, P.: *Combinatorial Set Theory: partition relations for Cardinals*. North Holland. N. Y. (2012).
 - [5] Halbeisen, L.: *Combinatorial Set Theory: With a gentle Introduction*. Springer Verlag. N. Y. (2011).
 - [6] Kreher, D. & Douglas, R.: *Combinatorial Algorithms*. CRC Press. N. Y. (1999).
 - [7] MacMahon, P.: *Combinatorial Analysis*. Chelsea Publications. N. Y. (1960).
 - [8] Spivey, M.: *The Art of Proving Binomial Identities*. CRC Press. N. Y. (2019).
 - [9] Stillwell, J.: *Intuitive Combinatorial Topology*. Springer Verlag. N. Y. (2001).

Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola

Jaime William Flores Tecalco

Alumno de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior de México (ENSM), Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Alumno de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc. Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México.
william10_511@hotmail.com

Resumen- En este artículo es trabajada, de manera sencilla, la deducción y aplicación de un método resolutivo para una ecuación cuadrática en función de su mínimo o su máximo; es decir, el vértice de la representación de su parábola. También se maneja $-k$ como un discriminante que nos ayuda a entender el comportamiento de la ecuación.

Palabras Clave- ecuación cuadrática, mínimos y máximos, vértice, función, método resolutivo, discriminante.

Abstract- This work uses deduction and application of a solving method for a quadratic equation as function of its minimum or maximum; it means the vertex the parabola representation. $-K$ is used as a discriminant to understand equations behavior.

Keywords- quadratic equation, minimum and maximum, vertex, function, solving method, discriminant.

Mathematical Subject Classification: 65Y04

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación cuyo primer miembro es un polinomio de segundo grado, con respecto a la incógnita X , y el segundo miembro es igual a cero, se denomina cuadrática. [1]

Para resolver la ecuación cuadrática existen diversos algoritmos que fueron descubiertos e implementados a través del tiempo; pasando por los papiros de los egipcios y babilonios (2000-1600 a.C.) [2]; por los matemáticos indios Aryabhata [2], Brahmagupta [3] y después con Bhaskara II [2]. Sin olvidar al persa Al-Khwarizmi [4] y al griego Diofanto de Alejandría [5], entre otros grandes personajes.

En la actualidad, se manejan varios de métodos para enseñar, aprender y resolver ecuaciones cuadráticas; como son: la fórmula general desarrollada por Bhaskara II en su obra Siddhanta Siromani-Bija Ganita [6]; la factorización: el método de trinomio cuadrado perfecto, también llamado completar el cuadrado, cuyo desarrollo fue empleado por los babilonios [2]; el método propuesto por el Dr. Po Shen Loh [7]; etc.

Siempre es importante contar con tantos métodos sean posibles para resolver problemas matemáticos, como en este caso, para encontrar las soluciones a las ecuaciones de segundo grado. Cada método es importante e insustituible gracias a que,

dependiendo de la situación, se puede emplear uno u otro para la mejor solución al problema en cuestión.

Por eso, en este artículo desarrollo la deducción de un algoritmo resolutivo para una ecuación cuadrática en función de su mínimo o su máximo, es decir, el vértice de la parábola, ya que se puede interpretar mediante una gráfica.

II. DESCRIPCIÓN

Una ecuación cuadrática, o de segundo grado, la podemos escribir de la forma general:

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (1)$$

Con $A \neq 0$

Donde X es la variable; A es el coeficiente del término cuadrático; B es el coeficiente del término lineal y C es el término independiente.

Una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene dos raíces que son reales y desiguales, reales e iguales, o conjugadas imaginarias. [8]

Tenemos que percatarnos que el coeficiente del término cuadrático A sea igual a uno para tener una mayor facilidad de resolución posteriormente.

Si A es diferente de uno podemos dividir toda la ecuación por dicho valor; posteriormente el coeficiente que acompañe al término lineal le llamaremos, por fines prácticos, P y al del término independiente Q . Es decir:

Si $A \neq 1$ la ecuación (1) queda de la forma:

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (1)$$

$$\frac{AX^2 + BX + C}{A} = \frac{0}{A} \quad (1.1)$$

$$X^2 + \frac{B}{A}X + \frac{C}{A} = 0 \quad (1.2)$$

Al aplicar la siguiente igualdad:

$$\frac{B}{A} = P \quad ; \quad \frac{C}{A} = Q \quad (2)$$

Se reescribe (1.2) a la forma cuadrática reducida:

$$X^2 + PX + Q = 0 \quad (3)$$

Al observar el primer miembro, nos damos cuenta de que se trata de un polinomio mónico, con el cual podemos completar el cuadrado.

Partiendo de la forma reducida:

$$X^2 + PX + Q = 0 \quad (3)$$

Es conveniente utilizar el método desarrollado por los babilonios, completar el cuadrado [2], para reescribir la ecuación (3). Por ello, se ocupan algunas propiedades de campo de los números reales [9] [10].

A la ecuación (3) se le aplica la propiedad modulativa para la suma:

$$X^2 + PX + Q + 0 = 0 + 0 \quad (3.1)$$

$$X^2 + PX + Q + 0 = 0 \quad (3.2)$$

El cero del primer miembro de la ecuación lo reescribimos, con ayuda de la propiedad invertida de la suma, como:

$$X^2 + PX + Q + \left(\frac{P}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{2}\right)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Es decir, se sumó y se restó en el primer miembro de la ecuación, el cuadrado del cociente del coeficiente de X entre dos, sin afectar el resultado.

Al operar el cuadro de los paréntesis y ocupar la propiedad conmutativa, podemos reescribir (3.3) de la siguiente manera:

$$X^2 + PX + \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{4} + Q = 0 \quad (3.4)$$

Se agrupan términos, utilizando la propiedad asociativa para la suma, obteniendo un trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(X^2 + PX + \frac{P^2}{4}\right) - \frac{P^2}{4} + Q = 0 \quad (3.5)$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto dando lugar a un binomio al cuadrado.

$$\left(X + \frac{P}{2}\right)^2 - \frac{P^2}{4} + Q = 0 \quad (4)$$

Dados dos números: $h, k \in \mathbb{R}$ entonces los podemos definir como:

$$h = \frac{P}{2} \quad (5)$$

$$k = -\frac{P^2}{4} + Q \quad (5.1)$$

La ecuación (4), en función de (5) y (5.1) da como resultado:

$$(X + h)^2 + k = 0 \quad (5.2)$$

$$(X + h)^2 = -k \quad (5.3)$$

$$X + h = \pm\sqrt{-k} \quad (5.4)$$

$$X = \pm\sqrt{-k} - h \quad (6)$$

En este punto debemos hablar sobre lo que es una función.

Para Dedekind, toda representación ϕ de un conjunto S se entenderá como una relación según la cual a cada elemento determinado s de S se le asigna un elemento determinado, que se llama imagen de s y se designa con $\phi(s)$; decimos también que $\phi(s)$ corresponde al elemento s, que $\phi(s)$ resulta o se produce a partir de s mediante la representación de ϕ , que se transforma en $\phi(s)$ mediante la representación de ϕ . [9]

Para G. Peano la función era un tipo de relación especial: "Si dos pares ordenados (x, y) y (x, z) con el mismo primer elemento están en la relación funcional f entonces necesariamente $y = z$ ". [10]

Para Bourbaki, una gráfica F es llamada funcional si para cada x hay como máximo un objeto que corresponde a x debajo de F. Una correspondencia $f = (F, A, B)$ es una función si para cada x perteneciente a A independiente de f, la relación $(x, y) \in F$ es funcional en y. El único elemento, el cual corresponde a x debajo de f, es llamado el valor de f del elemento de x de A; y es denotado por $f(x)$. Si f es una función, F es su gráfica y x es un elemento del dominio de f, la relación $y = f(x)$ es entonces equivalente a $(x, y) \in F$. [12]

Sabemos que el vértice V, en la parábola representada por la función cuadrática, es un valor mínimo o un máximo. Por lo tanto, podemos ocupar este concepto, incluido en el cálculo diferencial, para obtenerlo. [11]

Se representa (3) como una función.

$$f(x) = x^2 + Px + Q \quad (7)$$

Se deriva $f(x)$ y se iguala a cero para obtener la primera coordenada del vértice V. [11]

$$f(x) = x^2 + Px + Q \quad (7)$$

$$f'(x) = 2x + P \quad (7.1)$$

El valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Cuando la pendiente de la recta tangente se hace cero, tenemos un máximo o un mínimo de la función. [11]

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + P = 0 \quad (7.2)$$

$$2x = -P \quad (7.3)$$

$$x = -\frac{P}{2} \quad (8)$$

Se obtiene la segunda coordenada del vértice V al evaluar x en $f(x)$. [11]

$$f\left(-\frac{P}{2}\right) = \left(-\frac{P}{2}\right)^2 + P\left(-\frac{P}{2}\right) + Q \quad (8.1)$$

$$f\left(-\frac{P}{2}\right) = \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{2} + Q \quad (8.2)$$

$$f\left(-\frac{P}{2}\right) = \frac{P^2 - 2P^2}{4} + Q \quad (8.3)$$

$$f\left(-\frac{P}{2}\right) = -\frac{P^2}{4} + Q \quad (9)$$

Con los valores de (8) y (9) se halla el vértice V:

$$V = (x, f(x))$$

$$V = \left(-\frac{P}{2}, -\frac{P^2}{4} + Q\right) \quad (10)$$

Se observa fácilmente la relación de (10) con (5) y (5.1). Por lo que el vértice lo escribimos en función de estas relaciones.

$$V = (-h, k) \quad (11)$$

Sustituimos los valores de (11) en (6) para obtener una ecuación, en función del vértice, para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática (3).

$$X = \pm\sqrt{-k} - h \quad (12)$$

$$X = \pm\sqrt{-(k)} - (-h) \quad (12.1)$$

$$\boxed{X = \pm\sqrt{-k} + h} \quad (13)$$

Por (5.1) sabemos que $k \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto de los números reales lo podemos denotar como:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^- \cup 0 \cup \mathbb{R}^+ \quad (14)$$

$$\text{Casos posibles} \begin{cases} k \in \mathbb{R}^- \\ k = 0 \\ k \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (15)$$

Por lo tanto, en (13), se cumplen dos casos posibles:

$$\text{Si } k \in \mathbb{R}_0^- \rightarrow \pm\sqrt{-k} \in \mathbb{R}_0^+ \quad (16)$$

$$\text{Si } k \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \pm\sqrt{-k} \in \mathbb{C} \quad (17)$$

De donde el conjunto de los números complejos lo podemos definir como:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\} \quad (18)$$

Por lo cual, si $k \in \mathbb{R}^+$ el radical tendrá la forma $\pm\sqrt{k}i$ (19).

Para fines del procedimiento, al utilizar (13), el vértice que se encontrará en la práctica, lo podemos interpretar como:

$$\boxed{V = (h, k)} \quad (20)$$

III. GRAFICACIÓN

Conociendo (1) podemos interpretar una ecuación de segundo grado como una función, esta resulta en la gráfica de una parábola (Figura 1).

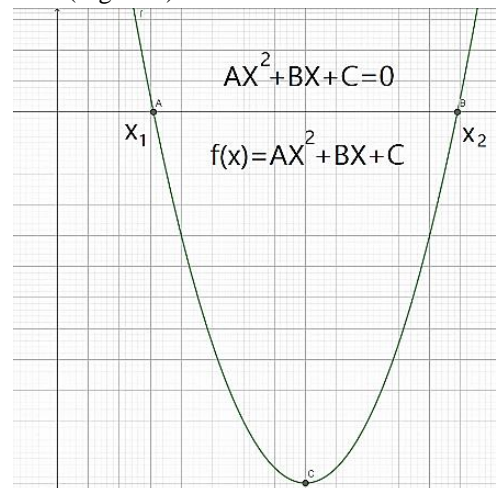


Fig. 1. Parábola, gráfica de una ecuación de segundo grado.

El coeficiente del término cuadrático A, por conveniencia de este método, debe ser igual a uno. Por tal motivo se realiza a (1) una serie de procedimientos resultando en (3) y posteriormente en (7). (Figura 2).

Al realizar esta modificación, pasar de (1) a (7), no modificamos ni alteramos las raíces o soluciones; ya que solo optamos por considerar una parábola alterna de la misma familia, por lo tanto, las raíces se conservan, pero el vértice si

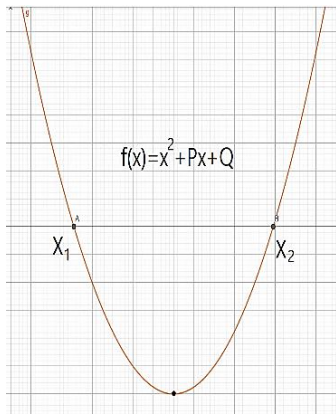


Fig. 2. Gráfica de la función de una ecuación cuadrática en su forma reducida.

se modifica de posición respecto al vértice original pero no compromete el resultado (Figura 3).

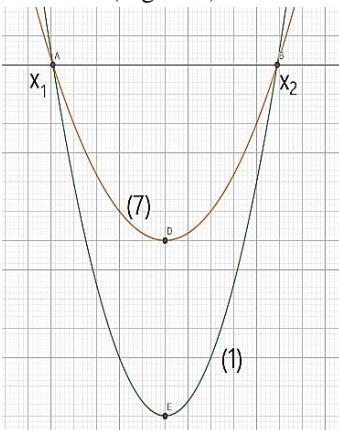


Fig. 3. Comparación de las parábolas de la ecuación (1) y de (7). Se observa que son parábolas de una misma familia, por lo cual, las raíces x_1 y x_2 son compartidas.

Para obtener (8) se manipula la primera coordenada del vértice V de (7); se deriva la función (7) en un punto y se iguala a cero; la pendiente de la recta tangente en el vértice V es cero porque es un máximo o un mínimo dependiendo la función. (Figura 4).

La segunda coordenada de V se encuentra evaluando (8) en (7). Por lo tanto, el vértice V ahora ya es conocido (10), y los escribimos en función de (5) y (5.1) lo que genera a (11). (Figura 5).

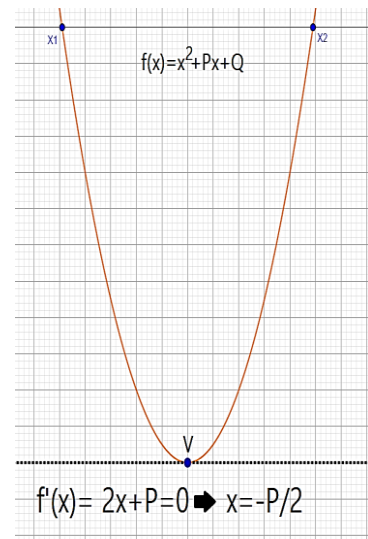


Fig. 4. Gráfica de la derivada de $f(x)$ en V.

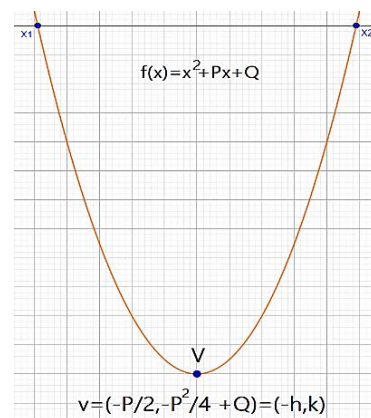


Fig. 5. Vértice V en función de $-h$ y k (11).

Se sustituye el vértice V (11) en la relación encontrada en (6) generando la fórmula (13) para obtener las raíces. Cabe mencionar que para utilizar (13) se debe tomar el vértice V, en la práctica, como (20) para mayor comodidad y evitar alguna confusión con el signo. (Figura 6).

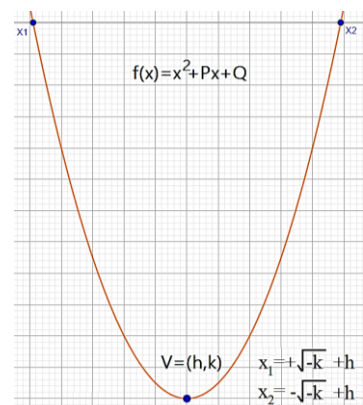


Fig. 6. Raíces de la función $f(x)$. En el vértice V, la coordenada h se colocó de forma positiva para una mayor comodidad para utilizar (13). Si se quiere utilizar $-h$, como en (11), el resultado no se vería afectado.

IV. APLICACIÓN DEL MÉTODO

A continuación, se ejemplifican tres situaciones diversas donde se aplica este método resolutorio y donde se muestra detalladamente su uso; cabe mencionar que con la experiencia y la práctica se pueden realizar algunos de los pasos mentalmente y reducir el tiempo de su ejecución, ya que muchos de éstos contienen operaciones elementales.

Caso 1.- $x^2 + 3x - 40 = 0$

Plan de trabajo: Encontrar los valores del vértice V (14) de la parábola, que representa la ecuación cuadrática, por medio de (10) para luego sustituirlos en (13).

Paso 1.- De (1) se verifica que $A=1$.

Paso 2.- Por (7) se sabe que $p=3$ y $q=-40$. Se encuentra el vértice utilizando (10).

$$V = \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q \right) \quad (10)$$

$$V = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3^2}{4} + (-40) \right)$$

$$V = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{169}{4} \right) = (h, k)$$

Paso 3.- Se sustituye el vértice V en (13) y se obtienen las soluciones.

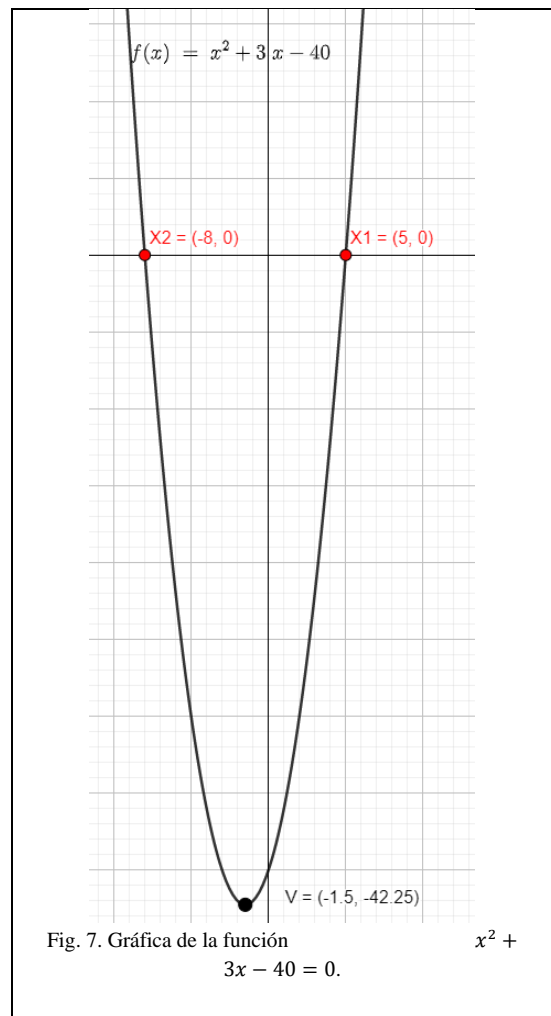
$$X = \pm\sqrt{-k} + h \quad (13)$$

$$X = \pm\sqrt{-\left(-\frac{169}{4}\right)} + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$X = \pm\frac{13}{2} - \frac{3}{2}$$

$$X_1 = +\frac{13}{2} - \frac{3}{2} = 5$$

$$X_2 = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2} = -8$$



Caso 2.- $3x^2 - 2x + 5 = 0$

Plan de trabajo: Encontrar los valores del vértice V (14) de la parábola, que representa la ecuación cuadrática, por medio de (10) para luego sustituirlos en (13).

Paso 1.- De (1) se verifica que $A=3$, entonces la ecuación cuadrática original se divide entre A.

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$$

Paso 2.- Por (7) se sabe que $p=-2/3$ y $q=5/3$. Se encuentra el vértice utilizando (10).

$$V = \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q \right) \quad (10)$$

$$V = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{5}{3} \right)$$

$$V = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right) = (h, k)$$

Paso 3.- Se sustituye el vértice V en (13) y se obtienen las soluciones. Se observa que el radical tiene la forma planteada en (19).

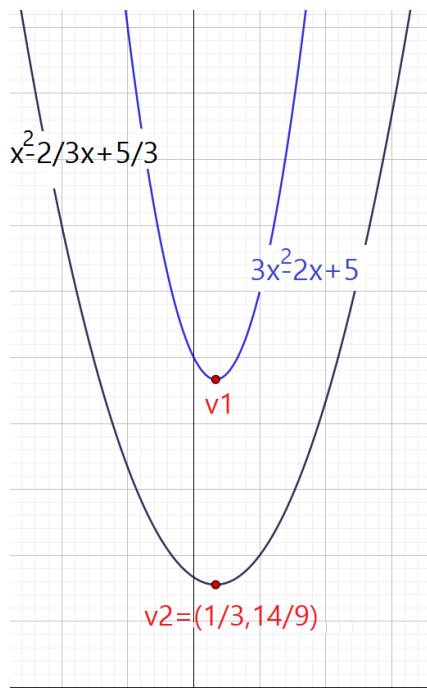
$$X = \pm\sqrt{-k} + h \quad (13)$$

$$X = \pm\sqrt{-\left(\frac{14}{9}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$X = \pm\frac{\sqrt{14}}{3}i + \frac{1}{3}$$

$$X_1 = +\frac{\sqrt{14}}{3}i + \frac{1}{3} = +\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}i$$

$$X_2 = -\frac{\sqrt{14}}{3}i + \frac{1}{3} = +\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{14}}{3}i$$



Caso 3.- $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Plan de trabajo: Encontrar los valores del vértice V (14) de la parábola, que representa la ecuación

cuadrática, por medio de (10) para luego sustituirlos en (13).

Paso 1.- De (1) se verifica que $A=1$. Como en este caso $A=9$, entonces la ecuación cuadrática original se divide entre A.

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

Paso 2.- Por (7) se sabe que $p=2/3$ y $q=1/9$. Se encuentra el vértice utilizando (10).

$$V = \left(-\frac{P}{2}, -\frac{P^2}{4} + Q\right) \quad (10)$$

$$V = \left(-\frac{\frac{2}{3}}{2}, -\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{1}{9}\right)$$

$$V = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) = (h, k)$$

Paso 3.- Se sustituye el vértice V en (13) y se obtienen las soluciones.

$$X = \pm\sqrt{-k} + h \quad (13)$$

$$X = \pm\sqrt{-(0)} + \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$X_1 = +0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$X_2 = -0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

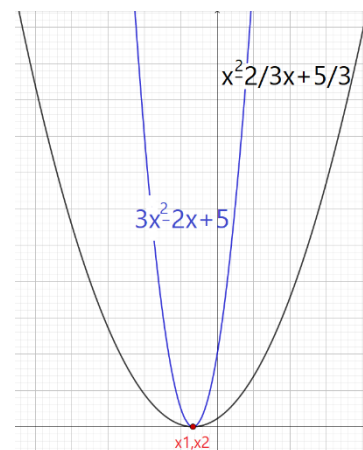


Fig. 9. Gráfico de las funciones $9x^2 + 6x + 1 = 0$ y de $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$. Podemos notar que solo un punto de la parábola toca al eje de las abscisas, por lo tanto, tendrá una solución real repetida.

V. CONCLUSIÓN

Se observa en (13) que el discriminante $-k$ le ocurre algo similar con el de la fórmula general, lo cual propicia una concepción de ante mano del comportamiento de la ecuación.

$-K > 0$	Dos soluciones reales distintas
$-K = 0$	Una solución real repetida
$-K < 0$	Dos soluciones conjugadas imaginarias

Tabla 1.- Discriminante $-k$.

El algoritmo resolutivo funciona para cualquier tipo de ecuación cuadrática sin importar que sus soluciones sean imaginarias.

Hay que tomar en cuenta que el vértice (10), cuando en (1), A es diferente de 1, será el de la ecuación cuadrática reducida (3) y no de la original; cabe señalar que esta modificación no altera las soluciones o raíces.

REFERENCIAS

- [1] Kalnin, R. A. (1978) Álgebra y funciones elementales. 2 ed. Editorial MIR. Rusia.
- [2] Katz, Víctor. (2008) A History of Mathematics: An Introduction. 3 ed. PEARSON. USA.
- [3] Brahmagupta (c. 628) Brahma-sphuta-Siddhanta. India.
- [4] Al-Jwarizmi, Abu Abdallah Muhammad ibn Musa (c. 823) Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala. Asia central.
- [5] Diophanti, Alexandrini (c. 250) Arithmetica. Grecia.
- [6] Strachey, E. (1978) Bija Ganita: or the Algebra of the Hindus. W. Glendinning. London.
- [7] Loh, Po-Shen (2019) A Simple Proof of the Quadratic Formula. Carnegie Mellon University. USA.
- [8] Meserve, B. E. (1953). Fundamental Concepts of Algebra. Addison – Wesley Publishing Company, Inc. USA.
- [9] Dedekind, R (1871) Vorlesungen Uber Zahlentheorie de Dirichlet. 2 ed. Alemania.
- [10] Peano, Giuseppe (1889). Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. Bocca, Torino.
- [11] Stewart, James (2010). Single Variable Calculus: Concepts and Contexts. Cengage Learning. U.S.A.
- [12] Bourbaki, N. (1968). Elements of Mathematics. Theory of Sets. Hermann Publishers. France.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- [13] Swokowski, Earl W. (1988) Calculus with Analytic Geometry. PWS Publisher. U.S.A.
- [14] Uspensky, J.V. (1997). Teoría de ecuaciones. LIMUSA México, D.F.
- [15] Baldor, A. (2008). Álgebra de Baldor. 2 ed. Editorial Patria. México.

Diseño experimental factorial 2^3 para la determinación de valores óptimos en la producción de joyería de plata

Leopoldo Viveros Rosas[#], Rebeca Díaz Téllez[#],
Mario Luis Chew Hernández[#], José Roberto Pérez Torres[#], Juan Barragán Aguilar[#]
#TECNm – TESCO, Av. 16 de septiembre 54, Coacalco, Estado de México, México.
leopoldo@tesco.edu.mx, rebeca.sub.a@tesco.edu.mx,
mario@tesco.edu.mx, jose.roberto@tesco.edu.mx, juan_barragan@tesco.edu.mx

Resumen- El diseño de experimentos y en particular el diseño factorial es una herramienta empleada en la mejora de procesos por su gran precisión en el modelo de predicción desarrollado, así como el reducido número de muestras empleados. Para éste trabajo, el desarrollo se centra en el área de recocido de una empresa productora de joyería; se emplea la metodología DMAIC de seis sigma y se presenta el empleo de herramientas básicas de calidad para determinar tanto la variable de respuesta a mejorar como los factores determinantes para la mejora; además se emplea análisis matemático para determinar los valores en la frontera que optimizan el proceso. Se usa el criterio de la segunda derivada para varias variables para encontrar los valores máximos y mínimos de la función que predice la variable de respuesta.

Palabras Clave- Diseño Factorial, Mejora de Procesos, Optimización de Procesos, Seis Sigma.

Abstract- The design of experiments and in particular the factorial design is a tool used in the improvement of processes due to its high precision in the prediction model developed, as well as the reduced number of samples used. For this work, the development is focused on the annealing area of a jewelry producing company; The six sigma DMAIC methodology is used and the use of basic quality tools is presented to determine both the response variable to improve and the determining factors for improvement; In addition, mathematical analysis is used to determine the values at the frontier that optimize the process. The second derivative criterion is used for several variables to find the maximum and minimum values of the function predicted by the response variable.

Keywords- Factorial Design, Process Improvement, Process Optimization, Six Sigma.

Mathematical Subject Classification: 62K15.

I. INTRODUCCIÓN

El diseño de experimentos es una técnica estadística que permite identificar factores o variables que afectan el comportamiento de un proceso productivo (o servicio) y de esta manera poder mejorarlo, tomando decisiones que efectivamente mejoren las características de calidad de este[1].

Con el diseño experimental se pueden identificar también cuáles son realmente las fuentes de variación y poder reducir esta última en la búsqueda de la mejora continua. El diseño de experimentos pretende planear, ejecutar y analizar el experimento de manera que los datos apropiados sean recolectados y que tengan validez estadística para poder obtener conclusiones válidas y útiles. Entendiendo por validez

estadística el que los resultados se puedan repetir consistentemente sobre todo en plena operación a gran escala[1].

El diseño de experimentos puede ser útil, tanto en la fase de diseño del producto o proceso como en la fase de control de procesos y se puede combinar las técnicas de diseños de experimentos con las técnicas básicas de control de calidad[1].

Por otra parte, los diseños factoriales producen experimentos, pues cada observación proporciona información sobre todos los factores investigados, y es factible observar las respuestas de un factor en diferentes niveles de otro factor en el mismo experimento. La respuesta a cualquier factor observado en diferentes condiciones indica si los factores actúan en las unidades experimentales de manera independiente[2].

En particular a los diseños experimentales en los que el plan experimental requiere estudiar el efecto sobre una respuesta de k factores, cada uno en dos niveles se les conoce como experimentos factoriales 2^k . Es frecuente que los niveles se denoten por “alto” y “bajo”[3].

Entonces, por diseño factorial se entiende que en cada ensayo o replica completa del experimento se investigan todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores. [5]

El efecto de un factor se define como el cambio en la respuesta producido por un cambio en el nivel del factor; se le llaman efectos principales ya que se refiere a los efectos de interés primario en el experimento[5].

Con lo que se refiere a la producción de joyería de plata, el proceso inicia a partir de una varilla de un centímetro de diámetro, esta varilla pasa por trenes de laminación para estirarla y enrollarla; el siguiente proceso es recocer el rollo para transformar la plata en hilo o alambre (trefilar) a la medida requerida; finalmente el alambre obtenido se vuelve a recocer para que se pueda trabajar en la máquina tejedora. El recocido es un tratamiento térmico para reducir la dureza y aumentar la ductibilidad de los metales.

La cadena que sale de la tejedora se lleva al proceso de soldadura, en la Figura 1 se muestra, por medio de un diagrama **supplier – inputs – process – outputs (SIPOC)** solo las partes involucradas para esta parte del proceso.

Por otro lado, los metales que son trabajados en frío sufren deformaciones y aumentan su resistencia, por ejemplo: un alambre que es trefilado baja sus medidas paulatinamente al pasar por cada uno de los dados. El endurecimiento que se obtiene durante el trabajo en frío, que se debe al aumento de

densidad de dislocaciones, se llama endurecimiento por deformación o endurecimiento por trabajo [6].

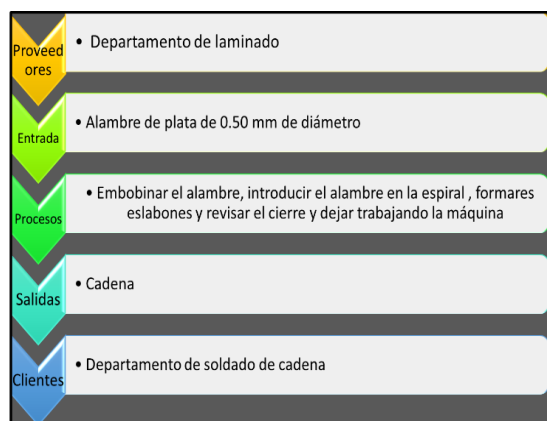


Figura 1. Diagrama de SIPOC

Para contrarrestar esta dureza se recoce el alambre bajo parámetros bien determinados, que permiten darle al alambre ciertas características que sean benéficas para los siguientes procesos.

El recocido es fundamental para la fabricación de cadenas de plata, de ello depende que las cadenas estén libres de defectos, para el recocido de plata es muy importante reconocer que las máquinas trabajan por muchas horas sin parar. La variable de respuesta a determinar es la velocidad de recocido ideal para que las máquinas se mantengan trabajando por periodos mayores a 10 horas sin presentar defectos. Esto traerá como consecuencia una ganancia económica considerable.

Así, el trabajo se centra en determinar tres factores (cada uno con dos niveles) que produzcan variación en la característica de calidad determinada. Para la determinación de la característica de calidad y los factores se emplean herramientas de calidad y para determinar el nivel de variación se emplea análisis estadístico.

II. MÉTODO

Esta investigación es de tipo experimental y tiene como propósito la aplicación de la metodología DMAIC [7] (acrónimo en inglés que indican las iniciales de las cinco fases que la conforman) de manera directa en un campo concreto de manufactura, este estudio se llevó a cabo en dos departamentos que están estrechamente relacionados. Se introducen cambios de manera controlada, se manipula la variable independiente (velocidad de recocido) para observar su efecto sobre la variable dependiente (dureza) y mejorar el cierre de eslabón.

Las FASES de la metodología DMAIC son:

- **Definir**, es la fase inicial de la metodología Seis Sigma, donde se define el problema, los objetivos, equipo y procesos más importantes del proyecto.
- **Medir**, en esta fase se recoge la información sobre las posibles causas que afectan el proceso y afectan su desempeño, así como la determinación de las capacidades y la sigma actual del proceso.

- **Analizar**, se analizan las causas raíz que afectan el desempeño actual del proceso y la tasa de errores que le generan, con la finalidad de proponer posteriormente un rediseño del proceso o producto de acuerdo con los resultados de la misma.
- **Mejorar**, en esta etapa se identifica las posibles características dentro del proceso que se pueden mejorar, se proponen soluciones para mitigar o eliminar las causas que originan problemas en los procesos y así lograr cumplir con las expectativas y necesidades del cliente.
- **Controlar**, se elabora un plan de control de mantener el sigma logrado.

III. DESARROLLO

Etapa 1: Definir el problema.

En esta parte se sugiere considerar aquellos proyectos que sean más significativos para la empresa, se debe escuchar al cliente (VOC = Voice of the Customer) para conocer sus requerimientos, sus necesidades. Se detecta el problema considerando la voz del cliente; en éste caso el problema a considerar es “eslabón mal cerrado”.

Para el trabajo desarrollado se tiene:

Declaración del problema.

Las máquinas durante un turno de nueve horas se paran por algún defecto ocasionado por el alambre.

Declaración del objetivo.

Aumentar las horas de trabajo sin que la cadena presente defectos.

Requisitos del cliente.

Cadena sin defectos y que las máquinas se mantengan trabajando nueve horas de trabajo continuo como mínimo.

Etapa 2: Medir.

La etapa medir es una continuación lógica a la de definir. ¿Qué es lo que se va a medir? y ¿Cómo se va a medir? Son preguntas que se contestan en esta etapa.

Un proceso tiene tres categorías principales de medida:

1. Salida o resultado: las medidas en la salida se enfocan en los resultados inmediatos (entregas, defectos, quejas).
2. Proceso: elementos que se puede seguir y medir.
3. Entrada: elementos que entran en el proceso y se transforman en la salida, unas malas entradas crean unas malas salidas, de modo que medidas a las entradas pueden también ayudar a identificar las causas de un problema [7]

En la Figura 2 se muestra un diagrama de Pareto en el que se puede observar que uno de los principales desperfectos de la cadena es el cierre de eslabón.

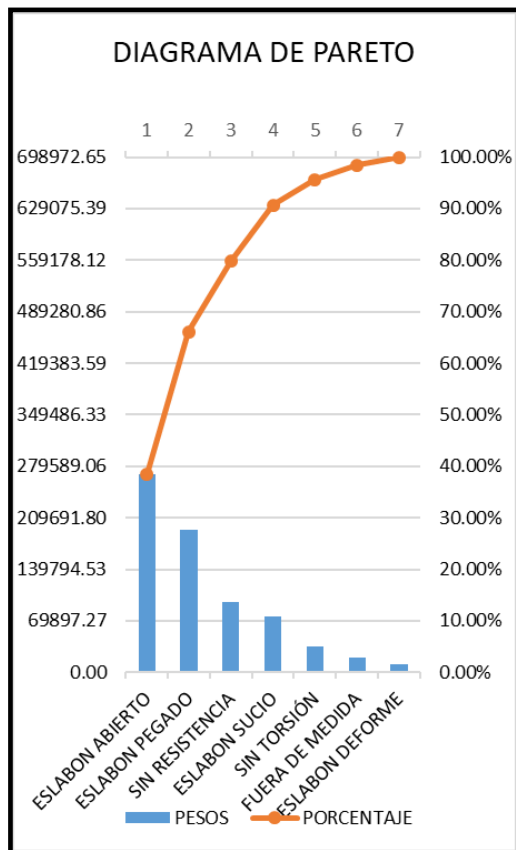


Figura 2. Diagrama de Pareto defectos

Etapa 3: Analizar.

En esta etapa se entra en los detalles para descubrir la causa raíz. Se efectúa el análisis de los datos obtenidos en la etapa de medición con el propósito de conocer las relaciones causales o causas raíz del problema.

En la Figura 3 se muestra el diagrama de causa – efecto (Ishikawa) que da como resultado el análisis correspondiente.

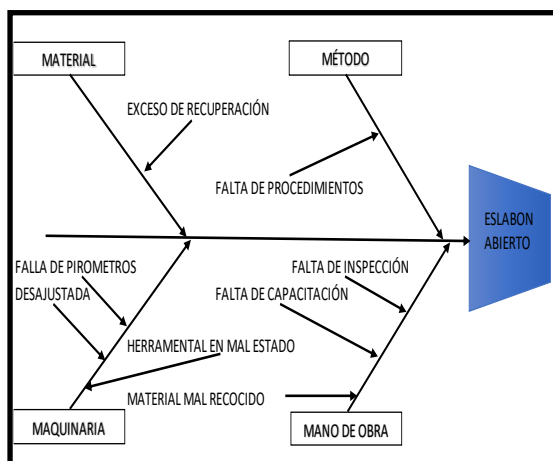


Figura 3. Diagrama de Causa y Efecto.

Del diagrama de la Figura 3 se observa que una de las causas que provoca el eslabón abierto tiene que ver con el recocido, maquinaria mal ajustada y herramental desgastado.

Etapa 4: Mejorar.

En la fase de análisis se encontraron los pocos vitales, en esta etapa se van a determinar aquellos que realmente afectan al proceso. El diseño de experimentos es un método para probar la significancia con que afectan cada uno de los factores a la variable de respuesta. [5].

Diseño de experimentos.

Se determinaron los factores iniciales:

- I. Temperatura en grados Celsius.
- II. Velocidad de recocido.
- III. Tipo de liga.

La Tabla 1 muestra el diseño experimental y las respuestas obtenidas. Se hacen tres réplicas de cada condición experimental.

Tabla 1. Diseño experimental.

A	B	C	RESPUESTAS (% de piezas aceptadas)		
740	14	-1	70	70	70
750	14	-1	100	100	100
740	16	-1	70	70	70
750	16	-1	100	80	80
740	14	1	70	70	70
750	14	1	80	90	90
740	16	1	70	80	70
750	16	1	70	70	70

Donde:

A es temperatura de proceso de recocido en $^{\circ}$ C.

B es Velocidad de recocido en metros x minuto

C es el tipo de liga utilizado (Tipo A, o Tipo B)

Materiales

Se utilizan carretes de alambre de 0.50 mm de diámetro sin recocer.

El proceso de recocido de alambre se lleva a cabo en un horno de recocido de alambre continuo con atmosfera controlada.

Para hacer las pruebas se utilizan 2 tipos de liga.

Cada uno de los alambres recocidos se probaron en una máquina, en algunos casos salieron defectos provocando que la máquina se detuviera a la media hora de trabajo, los resultados calificados como porcentaje de piezas aceptadas se muestran en la Tabla 1.

Para el cálculo de los efectos se utiliza el algoritmo Box, Hunter y Hunter descrito en [8], en el cual se calculan los efectos a partir de los signos utilizados para definir los niveles en la matriz de diseño; añadiendo una columna para cada interacción. Los signos de esas columnas se obtienen multiplicando algebraicamente los signos de las columnas de las variables que la componen. Se añade además una columna con +1, que servirá para calcular la media. Este valor es el promedio de todas las respuestas obtenidas durante la experimentación.

Para hallar cualquiera de los efectos, se suma algebraicamente la respuesta, de acuerdo con los signos definidos en la columna del efecto correspondiente, y se divide por la mitad del número de condiciones experimentales. Para hallar la media la operación es exactamente la misma de antes, excepto que se divide por el número de condiciones experimentales especificadas en la matriz de diseño [8].

En la Figura 4 se muestra el diagrama de Pareto para la consideración de los efectos principales de interacción.

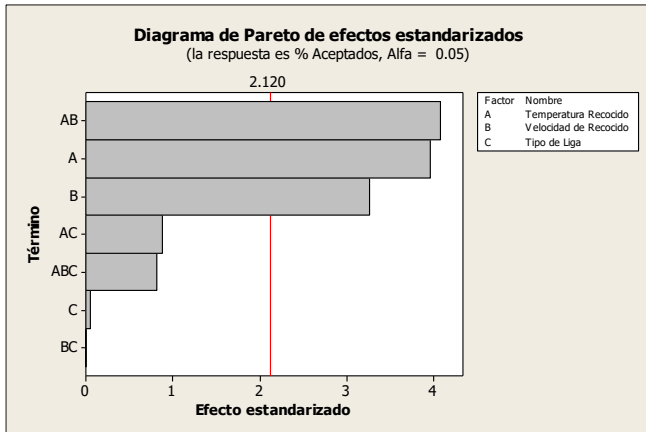


Figura 4. Diagrama de Pareto para efectos principales.

En la Tabla 2 se muestra el resultado de los efectos de interacción para el diseño factorial desarrollado.

Tabla 2. Efectos de Interacción.

Coef =	-10301.700
A =	14.000
B =	617.500
C =	-1245.000
AB =	-0.833
AC =	1.667
BC =	124.167
ABC =	-0.167

El algoritmo de Box, Hunter y Hunter, está basado en la simplificación que supone, en el caso general de la estimación de coeficientes por mínimos cuadrados (regresión lineal), el hecho de que las columnas de la matriz de diseño sean ortogonales [8].

Entonces, dado un conjunto de variables X_1, X_2, \dots, X_p (variables independientes o regresoras), de las que se piensa que pueden contribuir a explicar las variaciones de una variable Y (dependiente) según el modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon \quad (1)$$

el problema básico de la regresión lineal es estimar los coeficientes β_i a partir de los datos disponibles para esas variables y , por tanto, estimar el modelo anterior por medio de

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_p X_p + e \quad (2)$$

donde las b_i son las estimaciones de las β_i . [8]

Estas estimaciones se realizan por el método de los mínimos cuadrados. Es decir, se eligen valores de b de tal

manera que minimicen la suma de los cuadrados de los residuos (e). [8]

Con los efectos de interacción de la Tabla 2, se obtiene el modelo de regresión mostrado en (1).

$$y = -1031.7 + 14A + 617.5B - 1245C - 0.8333AB + 1.6667AC + 124.167BC - 0.167ABC \quad (3)$$

En la Tabla 3 se muestran las aproximaciones obtenidas con el modelo de regresión (3).

Tabla 3. Aproximación con el modelo de regresión.

A	B	C	Promedio	Aproxim
740	14	-1	70.0000	70.0064
750	14	-1	100.0000	100.0070
740	16	-1	70.0000	70.0156
750	16	-1	86.6667	86.6830
740	14	1	70.0000	69.9960
750	14	1	86.6667	86.6630
740	16	1	73.3333	73.3300
750	16	1	70.0000	69.9970

Considerando los efectos mas alejados de 0 de la expresión (3) [8] se obtiene la siguiente expresión

$$y_0 = -10301.7 + 14A + 617.5B - 1245C + 124.167BC \quad (4)$$

Obteniendo el gradiente de y_0 , se obtiene la siguiente expresión

$$\nabla(y_0)^T = (14, 617.5 + 124.167C, -1245 + 124.167B) \quad (5)$$

Se desea encontrar los puntos donde

$$\nabla(y_0)^T = (0) \quad (6)$$

Lo cual ocurre si y solo si

$$(14, 617.5 + 124.167C, -1245 + 124.167B) = (0, 0, 0) \quad (7)$$

Se puede observar que la expresión (7) genera el sistema de ecuaciones que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} 14 &= 0 \\ 617.5 + 124.167C &= 0 \\ -1245 + 124.167B &= 0 \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones anterior se puede observar que no hay puntos de inflexión ni críticos.

Etapa 5: Controlar.

El último paso es asegurar que las implementaciones en el proceso se mantengan y se actualicen, es importante implementar un plan de control para cada variable. Hay herramientas como: cartas de control, Poka -yoke, control estadístico del proceso, cartas de control por variables y por atributos, carta de individuales y rango móvil.

Se dará capacitación al personal que realiza el proceso de recocido de los materiales, se pondrán ayudas visuales y se colocarán graficas de control.

IV. CONCLUSIONES

Controlando el proceso de recocido se obtienen horas-máquina mayores a nueve horas, incluso se mantuvieron trabajando por dos días consecutivos sin defectos. Con estos resultados se evita mover el herramental para hacer ajustes.

La tabla de resultados del diseño experimental y el modelo de regresión permiten determinar el tiempo y velocidad de recocido que optimiza las horas máquinas dependiendo el tipo de liga que se tenga en ese momento, o cualquier tipo de cambios que se hagan dentro de los parámetros de diseño, encontrando que la mejor combinación para los factores es: Temperatura de recocido 750 °C; velocidad de recocido 14 metros x minuto y tipo de liga B.

A partir de los resultados de esta investigación se puede concluir que:

- La productividad se puede optimizar a partir de la aplicación se seis sigma.
- Las ventajas competitivas que se obtienen demuestran que esta herramienta es eficaz para resolver problemas.
- Las horas-máquina se incrementaron notablemente, obteniendo una mayor ganancia económica.
- La utilización de este método implicó excelentes resultados financieros para la empresa, ya que redujo los costos, lo que coincide con la propuesta de [9].

V. REFERENCIAS

- [1] Gutiérrez González P., Díaz Caldera L., Guzmán Sánchez M., Elementos de diseño de experimentos, México: Astra Ediciones, 2009.
- [2] Kuehls Robert O., Diseño de experimentos: Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación. México: Thomson 2a Edición 2001.
- [3] Walpole Ronald E., Myres Raymond H., Kyres Sharon L., Ye Keying, Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. México: Pearson 9a Edición. 2012.
- [4] P. P. P. Donald R. Azqueland, Ciencia e ingeniería de los materiales, México: International Thomson Editores s.a., 2006
- [5] Douglas Montgomery, *Diseño y analisis de experimentos*. México: Limusa, 2005.
- [6] Geoff Tennant, *Six Sigma*. México: Panorama, 2002.

- [7] Larry Holpp Peter S. Pande, *¿Qué es seis sigma?* España: Mc Graw-Hill, 2002.
- [8] Prat Bartés, Abert; Tort-Martorell Llabres, Xavier, Grima Cintas, Pere; Pozueta Fernández, Lourdes. Control y Mejora de la Calidad, Ediciones UPC. México 1998.
- [9] Galindo, L. M. (2006). Calidad y mejora continua. México: Trillas

Análisis y descripción de fenómenos determinísticos y probabilísticos. Cáncer y seguridad ciudadana.

Fernando Gustavo Isa Massa

FRT-UTN Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán, Moreno 935, San Miguel de Tucumán- Tucumán, Argentina.
ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- Las matemáticas que planteo en modelos basados en el cálculo diferencial y estadísticas circular son propicias a problemas de la humanidad como lo son: lucha contra el cáncer, trata de personas, violencia de género y delincuencia. De todas maneras, no son para lo único que sirven, siendo su funcionalidad muy abarcadora a otros problemas actuales. Uso para cálculo diferencial una serie finita convergente y otra serie que se convierte por Maclaurin y Taylor en una función. Estas dos son la constante de una ecuación diferencial de crecimiento exponencial. Para la ecuación de estadística circular lo demuestro de dos formas y defino 3 corolarios que se adaptan a la función. Sobre el cáncer las aplicaciones son diversas y se diferencia de paciente en paciente. En violencia de género, trata de personas y delincuencia se recomienda como prevenir y remediar tales males.

Palabras Clave- Cáncer, ecuación diferencial, estadística circular, seguridad.

Abstract- The mathematics that I've proposed in original models in differential calculus and circular statistics are conducive to humanity's problems such as: the fight against cancer, human trafficking, gender violence and crime. In any case, they are not the only thing they serve, their functionality being very comprehensive to other very current problems. I use differential calculus as a convergent finite series and another series that is converted by Maclaurin and Taylor into a function. These two are constant in a differential equation of exponential growth. In the circular statistics equation I've proved it in two ways and define 3 corollaries that fit the function. In cancer the applications are diverse and it differs from patient to patient. In gender violence, human trafficking and crime, it is recommended to prevent and remedy such evils.

Keywords- Cancer, differential equation, circular statistics, security.

Mathematical Subject Classification: 46N30

I. INTRODUCCIÓN

En nuestros tiempos no podemos prescindir de la ciencia como medio de crecimiento de los pueblos. El enfoque científico es el criterio más relevante en nuestra era y precisamente lo uso en temas de seguridad ciudadana como: violencia de género, trata de personas y delincuencia. Todo ello con modelos predictivos en estadística circular. Son temas delicados y urge darles solución con reconocimiento con base en técnicas matemáticas y además de las predicciones del acontecimiento de estos.

No tienen entre ellos correspondencia, pero son temas actuales y de inmediata solución con los modelos matemáticos. Se da una conclusión a cada problema y uso el lenguaje matemático de teoremas, demostración, y corolario. No

pretendo proponer un método sin errores, el error de precisión se da pero es mínimo y sirve para ver el desvío de las predicciones. Por último, para predicciones del crecimiento de los tumores para cualquier tipo de cáncer uso una serie finita y un modelo de cálculo diferencial en crecimiento exponencial.

De esa forma, pretendo lograr predecir el crecimiento de cualquier tumor en el tiempo. Debo agradecerle al colegio médico de Tucumán, a docentes amigos por la información brindada y su predisposición para aportar con datos a la investigación del artículo.

Teorema 1: Si la suma de incrementos de una serie finita con valor inicial c y variable de incremento x es continua y derivable, entonces su ecuación final de cálculo diferencial es:

$$Y = x_1 \cdot e^{(x \cdot (1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}) + e^{cx}) \cdot t}$$

II. DEMOSTRACIÓN

Sea una suma de valores que comienzan con una constante C y sus incrementos:

- 1) $C + (C \cdot \Delta x)$
- 2) $C + (C \cdot \Delta x + \Delta x)$
- 3) $C + (C \cdot \Delta x + \Delta x) + (C \cdot \Delta x + \Delta x) \cdot \Delta x$
- 4) $C + (C \cdot \Delta x + \Delta x) + (C \cdot \Delta x + \Delta x^2) + (C \cdot \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x$
- 5) $C + (C \cdot \Delta x + \Delta x) + (C \cdot \Delta x + \Delta x^2) + (C \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) + (C \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) \cdot \Delta x$

Reemplazo Δx por dx para valores pequeños

$$C + (C \cdot dx + dx) + (C \cdot dx + dx^2) + (C \cdot dx^2 + dx^3) + (C \cdot dx^2 + dx^3) \cdot dx + \dots$$

Reemplazo en dos sumatorias K_1 y K_2

Integro en x

$\int C_i dx = C_i X + K$; donde K es constante que la consideramos igual a 0.

$$\int C_i X dx = C_i \frac{X^2}{2}$$

$$\int C_i \frac{X^2}{2} dx = C_i \frac{X^3}{2 \cdot 3}$$

$$\int C_i \frac{X^3}{23} dx = C_i \frac{X^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\dots$$

$$\int C_i \frac{x^{n-1}}{23\dots(n-1)} dx = C_i \frac{x^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$$

Sumamos los resultados.

$$K1 = C_i + C_i X + C_i \frac{x^2}{2} + C_i \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_i \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + C_i \frac{x^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} = C_i$$

$$+ C_i X + C_i \frac{x^2}{2!} + C_i \frac{x^3}{3!} + \dots + C_i \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$K2 = \int (dx)^2 + \int (dx)^3 + \int (dx)^4 + \dots + \int (dx)^n$$

Ahora el gran problema es resolver $\int (dx)^2$
Hagamos el siguiente artificio matemático

$$f(dx)^2 = \int dx \, dx$$

$$F(x) = (dx)^2$$

$$\ln f(x) = 2 \ln dx$$

$$\ln dx = \frac{1}{2} \ln f(x)$$

$$\int \ln dx = \frac{1}{2} \int \ln f(x)$$

$$\frac{1}{dx} + c = \frac{1}{2} \frac{1}{(dx)^2} + c, \text{ simplifico los } dx \text{ y considero } c=0$$

$$Dx = \frac{1}{2}$$

$$\int (dx)^2 = \int \frac{1}{2} dx$$

$$\int (dx)^2 = \frac{1}{2} x$$

III. PRUEBA DE DERIVADAS

$$\frac{1}{2} x$$

La derivada es $\frac{1}{2}$

$$dx = \frac{1}{2}$$

$$\int (dx)^2 = \int \frac{1}{2} dx$$

$$\int (dx)^2 = \int (dx)^2$$

Con lo que se prueba
Y de la misma manera

$$\int dx^n = \frac{1}{n} x$$

Con lo anterior la suma queda de la siguiente forma

$$K1 = x + (C + C \cdot x + C \cdot \frac{x^2}{2} + C \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + C \cdot \frac{x^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n})$$

$$K2 = (\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x + \dots + \frac{1}{n} x)$$

$$K = K1 + K2$$

Veamos la forma de K1

$$= C_i + C_i X + C_i \frac{x^2}{2} + C_i \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_i \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + C_i \frac{x^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$$

$$= C_i + C_i X + C_i \frac{x^2}{2!} + C_i \frac{x^3}{3!} + \dots + C_i \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Esto es una aproximación a serie de Maclaurin con

$$f(x) = e^{cx}$$

$$f^j(0) = C_i e^{C_i 0} = C_i$$

$$f^{(j)}(x) = C_i e^{C_i x}, \text{ para toda derivada con } j=1, \dots, n$$

$$K1 = x + e^{cx}$$

Observemos K2

$$= x \cdot \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} x$$

Esta serie es finita ya que en su forma infinita es la serie armónica que diverge.

Sumamos K1 y K2

$$K = x + e^{cx} + x \cdot \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

$$K = x \cdot (1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}) + e^{cx}$$

Para todo crecimiento exponencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = K \cdot Y$$

Donde la variable a considerar de valor analítico para la ecuación es K

$$\frac{dy}{dt} = K \cdot Y$$

$$\cdot \frac{1}{Y} \cdot dy = K \cdot dt$$

Integro ambos miembros

$$\int \frac{1}{y} dy = \int K \cdot dt$$

$$\ln y = K \cdot t$$

$$Y = x_1 \cdot e^{K \cdot t}$$

$$Y = x_1 \cdot e^{(x \cdot (1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}) + e^{cx}) \cdot t}$$

Teorema 2

Si el agrupamiento de datos en estadística circular con funciones senos y cosenos y con un valor mayor me da una probabilidad, entonces:

$$P = \frac{(\sum_{i=1}^{n_1} \sin x_i - MAX \sin x_i)}{(n_1 - 1) \cdot MAX \sin x_i}$$

$$+ \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \cos y_i - MAX \cos y_i)}{(n_2 - 1) \cdot MAX \cos y_i}$$

$$+ \frac{(\sum_{i=1}^{n_3} \sin p_i - MAX \sin p_i)}{(n_3 - 1) \cdot MAX \sin p_i}$$

$$+ \frac{(\sum_{i=1}^{n_4} \cos z_i - MAX \cos z_i)}{(n_4 - 1) \cdot MAX \cos z_i}$$

$$P_a = \frac{P}{4}$$

$$0 < P_a < 1$$

IV. DEMOSTRACIÓN 1

Primer cuadrante

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x_i \, dx_i = \frac{-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$$

Segundo cuadrante

$$\frac{1}{\cos \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y_i \, dy_i = \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \pi} = 1$$

Tercer cuadrante

$$\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin p_i \, dp_i = \frac{-\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi}{\sin \frac{3\pi}{2}} = 1$$

Cuarto cuadrante

$$\frac{1}{\cos 2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos z_i \, dz_i = \frac{\sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi} = 1$$

V. DEMOSTRACIÓN 2

Uso los extremos de límites

1 - Mayores extremos

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n_1} \sin x_i - \text{MAX} \sin x_i)}{(n_1 - 1) \cdot \text{MAX} \sin x_i} \\ &= 1 \\ & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \cos y_i - \text{MAX} \cos y_i)}{(n_2 - 1) \cdot \text{MAX} \cos y_i} \\ &= 1 \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n_3} \sin p_i - \text{MAX} \sin p_i)}{(n_3 - 1) \cdot \text{MAX} \sin p_i} \\ &= 1 \\ & \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\sum_{i=1}^{n_4} \cos z_i - \text{MAX} \cos z_i)}{(n_4 - 1) \cdot \text{MAX} \cos z_i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2 - Aplico límite a los extremos inferiores

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^{n_1} \sin x_i - \text{MAX} \sin x_i)}{(n_1 - 1) \cdot \text{MAX} \sin x_i} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Indeterminación aplico L'Hopital

Y obtengo = 1

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \cos y_i - \text{MAX} \cos y_i)}{(n_2 - 1) \cdot \text{MAX} \cos y_i} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Indeterminación aplico L'Hopital

Y obtengo = 1

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sum_{i=1}^{n_3} \sin p_i - \text{MAX} \sin p_i)}{(n_3 - 1) \cdot \text{MAX} \sin p_i} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Indeterminación aplico L'Hopital

Y obtengo = 1

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n_4} \cos z_i - \text{MAX} \cos z_i)}{(n_4 - 1) \cdot \text{MAX} \cos z_i} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Indeterminación aplico L'Hopital

Y obtengo = 1

VI. COROLARIO 1

Una forma parecida a probabilidad de agrupamiento es de la forma:

$$\begin{aligned} P = & \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n_1} \cos x_i - \text{MAX} \cos x_i)}{(n_1 - 1) \cdot \text{MAX} \cos x_i} + \right. \\ & \left. \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} \sin y_i - \text{MAX} \sin y_i)}{(n_2 - 1) \cdot \text{MAX} \sin y_i} + \right. \\ & \left. \frac{(\sum_{i=1}^{n_3} \cos p_i - \text{MAX} \cos p_i)}{(n_3 - 1) \cdot \text{MAX} \cos p_i} + \right. \\ & \left. \frac{(\sum_{i=1}^{n_4} \sin z_i - \text{MAX} \sin z_i)}{(n_4 - 1) \cdot \text{MAX} \sin z_i} \right) \end{aligned}$$

Donde cambio el orden de los senos y cosenos en cada cuadrante la probabilidad también se demuestra

$$P_a = \frac{p}{4}$$

$$0 < P_a < 1$$

Corolario 2:

La probabilidad de agrupamiento es mayor cuando los datos se acercan a los ejes.

Corolario 3

La probabilidad de agrupamiento es mayor para datos cercanos o próximos entre si

Demostración en datos simulados

Violencia de género

Se estudian 3 aspectos a consideración que son:

- 1- En fechas especiales como conmemorativas, fines de semana u otros aumentan los casos, muchas veces por la ingesta de alcohol y las emociones que se convierten en violentas. Para esas fechas
- 2- Los casos de violencia están muy cercanos unos con otros por lo que la prevención es cada vez más necesaria y conveniente en mujeres que sufren de ello.
- 3- La primera vez que se cometió un acto de violencia tiene una alta probabilidad de repetirse, por lo tanto es un dato a tener en cuenta por la mujer.

En simulación con datos cercanos a los ejes simulo fechas festivas o fines de semana demostrando que los actos de violencia de género tienen una alta probabilidad de ocurrir en esas fechas. Los ángulos de mi probabilidad de agrupamiento son fechas o tiempo.

Por lo tanto como medida de prevención sirve esta información. Cabe acotar que la causa de la violencia en estas fechas muy probablemente se deba a la ingesta de alcohol y a emociones que se construyen desde la violencia por frustraciones u otros.

Los datos en grados corresponden a tiempo entre el día 1 a 7 que es domingo. Sacando con una regla de tres simple el correspondiente en grados del día en cuestión.

$$P_a = ((\sin(70) + \sin(85) + \sin(80))/3 \cdot \sin(87) + (\cos(170) + \cos(165))/2 \cdot \cos(175) + (\cos(345) + \cos(355) + \cos(375))/3 \cdot \cos(377)) / 3$$

$$P_a = 0.959$$

Entonces esta probabilidad muy alta que en forma demuestra corolario 2 en la probabilidad de agrupamiento.

Este agrupamiento de datos cercanos a los ejes me da una probabilidad alta que coincide con el análisis de violencia de género.

$$P_a = ((\sin(65) + \sin(67) + \sin(70))/3 \cdot \sin(72) + ((\cos(165) + \cos(168))/2 \cdot \cos(170) + ((\sin(265) + \sin(267) + \sin(270))/3 \cdot \sin(273) + (\cos(355) + \cos(361))/2 \cdot \cos(367))) / 4$$

$$P_a = 0.9554.$$

En esta oportunidad la probabilidad alta se refiere a los casos donde los datos están agrupados o cercanos, por lo tanto se demuestra corolario 3 y también la afirmación de que los

actos de violencia son consecutivos con poco tiempo de separación o muy próximos entre sí. Además se puede concluir que el primer acto no será el último y hay una alta probabilidad de que se repita.

Trata de personas y secuestro extorsivo; siguiendo la forma en que se comporta la probabilidad de agrupamiento, y con respecto al corolario 3; en el drama de la trata de personas podemos deducir que es muy probable que la persona secuestrada en las primeras horas se encuentre en un lugar cercano a la zona de raptó o a veces, su propio hogar. Para demostrarlo simulo casos donde se encontró a la víctima cerca de su hogar. Esto suele ocurrir en las primeras horas, debido a que después son trasladadas a otros estados o países.

Los datos en grados corresponden a coordenadas en latitud y longitud con regla de tres simple teniendo en cuenta latitud mayor y su correspondencia en grados.

$$P_a = ((\cos(130) + \cos(140) + \cos(135))/3.\cos(142) + (\sin(222) + \sin(225))/2.\sin(230) + (\cos(345) + \cos(350))/2.\cos(355)) / 3$$

$$P_a = 0.6848$$

La probabilidad es mayor a $\frac{1}{2}$ y demuestra corolario 3, donde se enuncia una probabilidad alta para situaciones donde los datos son próximos entre sí. Para el caso de la trata o secuestro extorsivo, la primera ubicación de la víctima es en lugares cercanos a su casa. Esto es debido a que el secuestrador estudia a la víctima y muchas veces puede ser su vecino o ligado a sus vecinos. Las primeras horas son cruciales para encontrar en lugares cercanos ya que después son trasladados a otros países o estados. Los ángulos de mi probabilidad de agrupamiento para este caso son lugares o posición geográfica.

Delincuencia:

Lo que analizamos a continuación es la procedencia de los delincuentes, de donde vienen y a donde se dirigen. Haciendo uso del corolario 3 podemos concluir que existe una alta probabilidad de que los delincuentes vivan cerca del lugar donde roban, por un aspecto de comodidad y operativo, debido a que debe buscar suministros, dejar las prendas que va robando y otras caracterizaciones. Por una cuestión de códigos no roba en su mismo hábitat o lugar de residencia, pero si va a robar a los lugares en un radio no muy grande de cercanía con su domicilio.

Los grados se obtienen de una regla de tres teniendo en cuenta la distancia mayor como el mayor valor en grados.

$$P_a = ((\sin(65) + \sin(70) + \sin(73))/3.\sin(75) + (\cos(340) + \cos(343) + \cos(345))/3.\cos(350)) / 3$$

$$P_a = 0.6139$$

Esta probabilidad considerada de moderada a alta demuestra corolario 3 y la hipótesis de que los delincuentes hacen sus robos en lugares cercas de donde viven en un radio no muy lejano de su hogar por las razones que explicamos antes. Los ángulos de mi probabilidad de agrupamiento son lugares o posiciones geográficas.

Cáncer:

En el presente artículo, me propuse investigar el cáncer y su tratamiento en 5 variables que contiene la ecuación, demostrando la utilidad de la ecuación en la lucha contra la

enfermedad que es una de las principales causas de muerte mundial. Es importante las etapas del cáncer que con mínimas diferencias entre cada paciente identifican el estado del tumor.

A continuación enuncio la ecuación vista en teorema 1 y sus variables funcionales a cualquier cáncer.

$$Y = x_1 \cdot e^{(x \cdot (1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}) + e^{cx}) \cdot t} \quad (1)$$

Analicemos cada variable

Y: valor nuevo de tamaño de tumor

x_1 : Valor inicial del tamaño del tumor en la primera etapa

X: Último valor del tumor.

N-1: Número de etapa

C: Valor genético o de causas del cáncer como alimentación, consumo de alcohol o tabaco y otros.

T: Tiempo de ocurrencia entre una etapa y otra.

Estas cinco variables independientes son las adecuadas y analizan a la sintomatología y tratamiento de la enfermedad.

Como decía el Dr Felipe Palazzo de la Universidad nacional de Tucumán (Tucumán-Argentina), a quien interrogué sobre la enfermedad: no existe enfermedad sino enfermos y estos son en sí mismos un caso particular de la sintomatología y tratamiento.

Cáncer de pulmón no microcítico:

Etapa 1:

Empezamos con un tamaño de tumor de 0.5 cm (valor de ancho), en la primera etapa, y valor de carga genética y diversas causas $c=0.3$

$$Y = 0.5 \cdot e^{(0.5 \cdot (1 + \frac{1}{2}) + e^{0.3 \cdot 0.5}) \cdot 0.3}$$

$$Y = 1.0148 \text{ (cm ancho)}$$

La variable tiempo es la que se ajusta a 0.3 para que el próximo valor de tamaño de tumor sea parecido a lo que dice la bibliografía de la etapa 2 que es un tamaño de 1 cm

Etapa 2:

$$Y = 0.5 \cdot e^{(1 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + e^{0.3 \cdot 1}) \cdot 0.17}$$

$$Y = 2.0505 \text{ (cm ancho)}$$

En esta etapa la sumatoria toma dos sumandos y $x=1$ deducido del valor de Y de la etapa anterior. En este caso, y como es costumbre en todos los análisis de cáncer con la ecuación, el valor ajustable del tiempo es cada vez menor. EL valor de Y coincide con el valor del tumor en la etapa 2.

Etapa 3:

$$Y = 0.5 \cdot e^{(2.0505 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + e^{0.3 \cdot 2.0505}) \cdot 0.013}$$

$$Y = 2.9619 \text{ (cm ancho)}$$

Que coincide con el tamaño del tumor en esa etapa[2].

Recordemos que cada paciente tiene una c distinta la que tomo a consideración es de ejemplo y puede variar como también el tiempo t .

Cáncer de seno:

Es uno del cáncer más tratamiento mejora con la precaución y prevención al hacerse mamografías en forma periódica.

Evaluemos el valor en mm de los ganglios linfáticos. Empezamos con 0.2 mm.[1] de Etapa 1.

$$Y = 0.2 \cdot e^{(0.2 \cdot (1 + \frac{1}{2}) + e^{0.3 \cdot 0.2}) \cdot 2.6}$$
$$Y = 2.0297 \text{ (mm ancho)}$$

Etapa 2:

$$Y = 0.2 \cdot e^{(2 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + e^{0.3 \cdot 2}) \cdot 0.1}$$
$$Y = 4.8392 \text{ (mm ancho)}$$

Si bien los resultados pueden variar de investigador a otro, lo que se saca de conclusión es que el tiempo va reduciéndose de etapa en etapa y mide el ancho del tumor. El valor de tiempo se deduce de lo que corresponde a la etapa posterior y se adecua a ese valor y se ajusta al mismo.

Por lo tanto como concluí en el anterior análisis de cáncer de pulmón no microcítico, el tiempo va reduciéndose de etapa en etapa. Esto podría ser una información muy valiosa para los investigadores para saber el motivo de este fenómeno.

Cáncer de páncreas:

Es un cáncer muy común y de difícil tratamiento

Etapa 1:

$$Y = 2 \cdot e^{(2 \cdot (1 + \frac{1}{2}) + e^{0.3 \cdot 2}) \cdot 0.013}$$
$$Y = 3.2299 \text{ (cm ancho)}$$

Etapa 2:

$$Y = 2 \cdot e^{(3.22 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + e^{0.3 \cdot 3.22}) \cdot 0.0005}$$
$$Y = 5.0682 \text{ (cm ancho)}$$

Cabe aclarar que cada etapa es variable por las causas genéticas y de consumo de alimentos, alcohol o tabaco que es el valor de c. Para fines prácticos en cada simulación uso el valor de c=0.3

También el valor de cada etapa como etapa 1 o etapa 2 cambia según la consideración de cada autor y se refiere al valor del tumor en esas circunstancias, aunque también varía de autor en autor[3].

Análisis de las variables:

Y: Valor de tamaño de tumor deducido de Ec(1).

N-1: Es la etapa a considerar pero hay que aclarar que su valor solo corresponde a un aumento del tamaño del tumor según la bibliografía, y no a un valor exacto de etapa. Es importante hacer notar en la ecuación cuantos sumandos corresponden según n, ya que esto me vincula con el estado del paciente según un nuevo crecimiento del tumor. En resumen la etapa generada en n-1, es un valor nuevo de crecimiento del tumor

C: Corresponde al valor genético y causas comunes de comienzo del tumor como pueden ser consumo de alcohol, tabaco o mala alimentación.

Como en demostración la variable c es el comienzo de la sumatoria que se va integrando, y por esa razón es el inicio del tumor. El inicio del tumor corresponde a la variable c y su valor genético.

X1: Valor en la primera etapa de tamaño de tumor y coincide con el valor inicial de la ecuación de crecimiento exponencial.

Por lo tanto significa el valor inicial del tamaño del tumor. Su valor no varía a lo largo del cálculo en las distintas etapas y

por eso es de suma importancia para análisis de cualquier tumor.

X: Como se deduce del término de dx en su integración, se deduce que es el valor de la última etapa del tamaño del tumor y su representación como tamaño variable del tumor se refuerza por esa circunstancia. Cabe acotar, que esta variable es deducida de un cálculo anterior en la etapa anterior y su presencia y representación en Ec(1), genera un cambio en los valores finales de Y; por lo tanto es de vital importancia su correcta interpretación.

T: El tiempo es una variable que cambia para alcanzar según la bibliografía para alcanzar los valores de tamaño de tumor promedio para cada etapa. Según una investigación de la universidad de Quilmes - CONICET (Buenos Aires - Argentina), el crecimiento del tumor cambia el reloj biológico del paciente, y genera complicaciones con el tratamiento debido que este reloj es importante en el sistema inmunológico que combate al cáncer entre otros. Entonces este tiempo que calculo y varía según el tamaño del tumor y referenciando la investigación de la universidad de Quilmes, se ve modificado y como se ve en cada uno de los análisis de tumor, va progresivamente bajando y esto es debido a la pérdida del reloj biológico. Esta variable tiempo que al principio su valor era un misterio para el análisis de la Ec (1), encuentra respuesta en el comportamiento del reloj biológico de los pacientes con cáncer y será de gran utilidad para los investigadores de la enfermedad para cuantificar los valores y variables que se consideren de interés.

VII. CONCLUSIÓN

Con dos modelos propuestos originales en cálculo diferencial y estadística circular, indago problemas actuales de muy difícil solución como lo son: violencia de género, trata de personas, delincuencia y cáncer. Sus causas se describen como así también sus soluciones, siguiendo el modelado matemático. Cada modelo es de compleja interpretación y de rápida solución. Son muchos más los problemas que se solucionan pero elegí estos por su actualidad e importancia.

VIII. AGRADECIMIENTOS.

Al Dr Felipe Palazzo, al Cdr Lauro Rodríguez. Al comité de JOOM

REFERENCIAS

- [1] <https://www.cancer.org/es/cancer/cancer-de-pulmon/deteccion-diagnostico-clasificacion-por-etapas/clasificacion-por-etapas-no-microcitico.html>. Accedido 21 Septiembre 2021
- [2] <https://www.cancer.org/es/cancer/cancer-de-seno/compreension-de-un-diagnostico-de-cancer-de-seno/etapas-del-cancer-de-seno.html>. Accedido 22 Septiembre 2021
- [3] <https://www.cancer.org/es/cancer/cancer-de-pancreas/deteccion-diagnostico-clasificacion-por-etapas/clasificacion-por-etapas.html>. Accedido 24 Septiembre 2021

Diseño, modelado y construcción de un controlador de presurización PID.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo describe los resultados obtenidos al modelar matemáticamente, diseñar y manufacturar un controlador de presurización utilizando el algoritmo proporcional integral derivativo (PID) para una escuela que no cuenta con tinacos y solamente una cisterna.

Palabras Clave- algoritmo proporcional integral derivativo, hidroneumática, presurización, control automático.

Abstract- This work describes the main results obtained by mathematically modeling, designing and manufacturing a pressurization controller using the proportional integral derivative (PID) algorithm for an elementary school which does not have roof water tanks and just one under floor tank.

Keywords- proportional integral derivative algorithm, hydropneumatics, pressurization, automatic control.

Mathematical Subject Classification: 93C10

I. INTRODUCCIÓN

La escuela primaria Dr. Roberto Solís Quiroga ubicada en Tlalpan, Ciudad de México actualmente no cuenta con cisternas para suministrar el agua para los sanitarios. La escuela cuenta con dos bombas hidroneumáticas conectada a tubería hidráulica de la cisterna para suministrar agua a los sanitarios y se activaba manualmente, lo cual generaba muchos problemas y falta de higiene con la comunidad estudiantil debido a la pandemia del virus SARS-COV-2 [1].

Para el problema urgente anterior se propuso la automatización del sistema hidroneumático mediante una tarjeta controladora basada en un microcontrolador PIC 16F628A para proporcionar la presión solicitada de forma anticipada mediante sensores utilizando un algoritmo PID (*Proporcional-Integral-Derivativo*) que será acotado matemáticamente como Ω_{PID} y un sistema de potencia basado en relevadores de estado sólido para el control de los motores.

Se describe el diseño del sistema de sensado, control y potencia, el modelado matemático, el diseño del algoritmo del firmware, su manufactura y las pruebas de control en la escuela.

II. METODOLOGÍA

Se procedió a seleccionar la metodología del diseño ágil denominada prototipado rápido para hardware formado por el ciclo virtual de *diseño-prototipación-verificación* [2] debido a que la higiene es una prioridad en la salud de los estudiantes derivado de la pandemia del virus SARS-COV-2 [1].

Para el diseño se seleccionó la metodología top-down [3] descrita en la figura 1 que es compatible con el prototipado rápido [2] y que permite el uso del diseño asistido por

computadora (CAD) y manufactura asistida por computadora (CAM)[4].

La metodología parte de descripciones que van evolucionando desde sistema, modular, circuito y componentes para dar origen a un prototipo funcional.

Cabe señalar que cada una de las fases puede auxiliarse total o parcialmente de los procesos del modelado matemático, búsqueda de librerías que apoyen el diseño ágil[2], la búsqueda de la mejor topología del sistema, su optimización y verificación continua, lo cual brinda una metodología rápida y funcional.

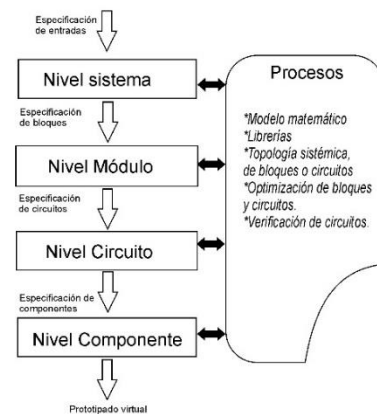


Fig. 1. Metodología Top-Down

III. ANÁLISIS

La metodología de diseño top-down[3] anteriormente descrita parte de las especificaciones técnicas las cuales son el control de un equipo hidroneumático cuya presión de trabajo en libras por pulgada cuadrada (pound per square inch / PSI) dada por:

$$[40 \geq p \leq 60] \quad (1)$$

Por otro lado la altura máxima de succión es 7 metros para un volumen de tanque de 40 litros y un caudal de 100 listros por minuto (L/s).

Su potencia viene dada por 2 bombas que trabajan a 120 Voltios Corriente Alterna (AC) por fase; es decir tiene un consumo de 360 Vac cada motor trifásico conectado en paralelo; el consumo total de las bombas es de 6 Amperios (A) lo que da 2160 Watts (W), es decir para una eficiencia del motor trifásico máxima (E) del 99% los Caballos de Fuerza

(Horse Power /Hp) eléctricos viene dados por la constante C de 746[5]:

$$hp = [3(120)]6 = \frac{2160(E)}{746} | E = 0.99$$

$$hp = 2.86648 \quad (2)$$

El siguiente paso es la descripción mediante un análisis a nivel módulo[3] el cuál puede realizarse con la técnica Work Breakdown Structure (WBS)[6] la cual consiste en la descomposición modular del problema a modo de poder trabajar en subsistemas con sus partes para dar origen al diagrama de la figura 2 que permite solucionar el problema describiendo y diferenciando los procesos en bloques.

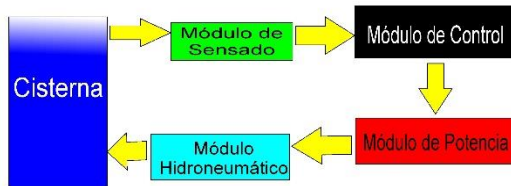


Fig. 2. Análisis WBS del sistema requerido.

IV. DISEÑO DEL MÓDULO DE SENSADO Y CONTROL.

Continuando con la metodología anteriormente descrita [3] se procedió a la descripción a nivel circuito electrónico y a nivel componentes; así como seleccionarlos respecto a la arquitectura descrita. Para el módulo de sensado se utilizó el diseño asistido por computadora (CAD) para diagramar y simular el comportamiento mediante prototipado rápido[2] de una placa de sensores encapsulada para medir los niveles de agua en estados analógicos mínimo y máximo para su funcionamiento. Los sensores van a la cisterna mediante dos resistencias de 10 $K\Omega$. El módulo está conectado a un arreglo integrado de 8 transistores Darlington con emisor común ULN2803A con 2 indicadores, como se muestra en la figura 3 para los LED y paralelamente la señal analógica es enviada al PIC para su conversión digital.

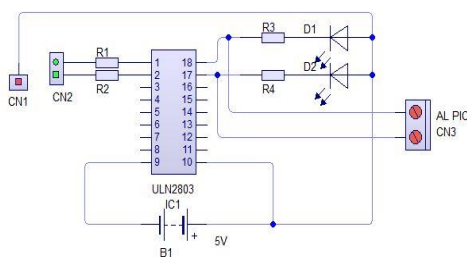


Fig. 3. Módulo de sensado de niveles de agua

Para el módulo de control se seleccionó un microcontrolador PIC 16F628A Surface Mounted Device (SMD) el cuál es compacto y apropiado para la tarjeta (Printed circuit Board/ PCB) a diseñar; se programó para utilizar su reloj interno configurando 2 salidas para el módulo de potencia que maneja dos bombas y 2 indicadores de éstas.

El módulo de control se encuentra conectado al módulo de sensado y a dos presostatos del sistema hidráulico que cierran o abren dependiendo de la lectura de presión de un fluido por la señal del microcontrolador, como se muestra en el diagrama CAD[4] de la figura 4.

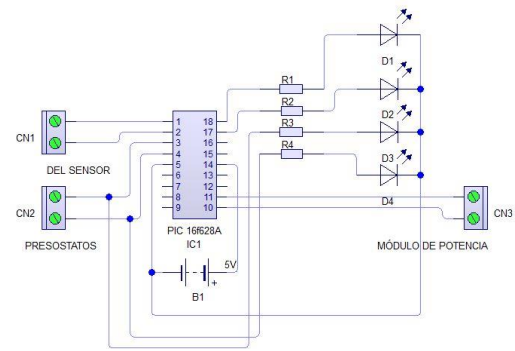


Fig. 4. Módulo de control

V. DISEÑO DEL MÓDULO DE POTENCIA-HIDRONEUMÁTICO

El último módulo descrito con la técnica WBS[6] y utilizando la metodología[3] es el de potencia que se encuentra conectado a los dos motores de bomba trifásicos.

Se seleccionaron como componentes de potencia los relevadores de estado sólido SSR-40 DA; mismos que a diferencia de los electromecánicos no generan ruido, calentamiento y son inmunes a quedar magnetizados; así mismo su velocidad de conmutación es de alrededor de 10 mseg para poder manejar la velocidad del motor y trabajan con los 5v; siendo compatibles con el módulo de control sin alguna interfaz de potencia de carga externa.

Al contar cada motor con tres fases se diseñó mediante CAD[4] un arreglo que permite el control de éstas mediante una sola entrada de 5v proveniente del módulo de control hacia tres relevadores de estado sólido simultáneos que alimentan las tres líneas de cada motor trifásico como se describe en la figura 5.

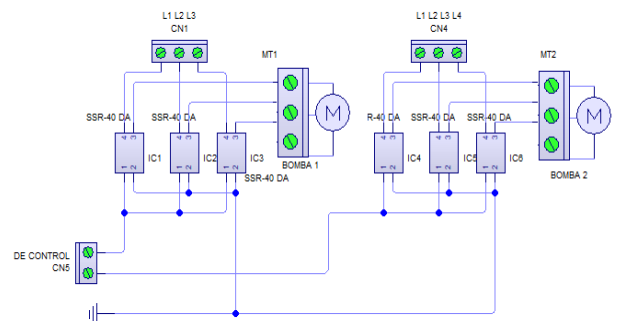


Fig. 5 Módulo de potencia-hidroneumático

VI. MODELO MATEMÁTICO DEL Ω_{PID}

Uno de los procesos descritos en la metodología top-down [3] es el modelado matemático del firmware de control que requería de un algoritmo que permitiera anticipar el llenado de los baños basándose en el comportamiento del sistema de modo que pudiera ajustarse respecto al comportamiento del llenado respecto al tiempo.

Se utilizó el modelo de control Proporcional-Integral-Derivativo acotado en el modelo como Ω_{PID} siendo seleccionado el algoritmo clásico[7] que permite predecir la incertidumbre -de un comportamiento futuro- no lineal [8], ya que no sólo elimina la desviación del estado continuo mediante el proceso de integración; sino que también permite la predicción del comportamiento futuro utilizando el proceso de derivación.

Para la descripción de las secciones anteriores se modelará el sistema centrado en el manómetro y la salida que debe controlar.

Sea un cuerpo en movimiento sobre los \mathbb{R}^n y las variables en un instante t definidas por:

$$\begin{aligned} & \text{Presostatos } p(t) \\ & \text{Niveles } n(t) \\ & \text{Velocidad del motor } v(t) \end{aligned}$$

Si se parte de la condición en donde para que el sistema controle debe contar la cisterna en un nivel mínimo de agua tal que sea medible por n ; por lo que n será un valor analógico comprendido entre $n1min$ a $n2max$ que envíen los sensores teniendo una resolución $0 \leq n \leq 255$.

El presotato manda una señal analógica de presión mediante su manómetro y permite el control de apertura de agua pudiendo contar con una resolución $0 \leq p \leq 255$.

La velocidad v de cada motor de bomba es controlada por un código de conmutación simplificado en una resolución de velocidad digital $0 \leq v \leq 255$. Siendo controlado cada motor por su respectivo presostato.

Las fuerzas externas son definidas por una fuerza de control de entrada u y la función no lineal del velocidad del motor de la bomba:

$$v = (p, n) + u \mid 0 \leq p \leq 255; 0 \leq n \leq 255 \quad (3)$$

Simplificando para cada par motor-presostato viene dada la función como:

$$v = (p, n) \quad (4)$$

La salida v deseable de control estará dada por un valor cuyo sistema de control sea retroalimentado de modo que garantice que la velocidad converja con el valor deseado de velocidad de activación de la bomba (*setpoint*) $y^* \in \mathbb{R}^n$ para cualquier presión y nivel inicial.

El modelo que actuará como la fuerza de control de entrada u viene dada por los valores a designar en los parámetros *Proporcional* k_p , *Integral* k_i y *Derivativa* k_d aplicados en el modelo estándar PID[7]:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(s) ds + k_d \dot{e}(t) \quad (5)$$

Donde e es el error de control[9] de la variable v obtenido; siendo definido por:

$$e(t) = y^* - v(t) \quad (6)$$

Los términos PID de la velocidad es dada por un valor de control y^* como:

$$\begin{aligned} & \text{Proporcional } k_p \\ & \text{Integral } k_i \\ & \text{Derivativa } k_d \end{aligned}$$

Dado que $v = \dot{p}$, $n = \dot{p}$ como momentos; entonces (4) se puede escribir como en análisis como[9]:

$$\ddot{p} = f(p, \dot{p}, t) + u \quad (7)$$

Indicando los estados dentro del espacio de la ecuación $p = x_1$; $\dot{p} = x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $e(t) = y^* - x_1(t)$; el sistema con control PID[9] viene dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + u(t) \\ u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(s) ds + k_d \dot{e}(t) \end{cases} \quad (8)$$

Donde $\|x\|$ es la norma Euclidea[10] de un vector x P una matriz $m \times n$ definida como:

$$\|P\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1} \|Px\| \quad (9)$$

Lo anterior denota la norma operadora para la matriz P inducida por la norma Euclidea[9][10].

Siendo $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Siendo $\mathbb{R}^{3+} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Utilizando el espacio[10] funcional[9]:

$$F_{L_1, L_2} = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n) \mid \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \leq L_1, \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \leq L_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (11)$$

Donde L_1 y L_2 son constantes positivas, $C^1(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^+)$ indica el espacio[9] de toda función que va desde $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ hasta \mathbb{R} las cuales se son fraccionalmente continuas en t , con derivadas parciales continuas con respecto a (x_1, x_2) .

Cabe indicar que se desea predecir valores de un sistema PID[7], por lo que se debe considerar que es una función con incertidumbre que puede ser expandida reemplazando las condiciones de las derivadas parciales con propiedades globales certeras del tipo Lipschitz [7].

Teorema 1. Si se utilizan los datos generados en (8) correspondientes al diseño del sistema[9] para $\forall t \in F_{L_1, L_2}$ por conocer se tiene que:

$$\forall [t \in \mathbb{R}^+; y \in \mathbb{R}; f(y, 0, t)] = f(y, 0, 0). \quad (12)$$

Entonces: $(\forall (L_1, L_2) > 0) \exists \Omega_{PID} \subset \mathbb{R}^3$.

Donde Ω_{PID} es el controlador PID de 3 dimensiones[9] definido como:

$$\Omega_{PID} = \{k_p, k_i, k_d\} \in \mathbb{R}^{3+} \mid k_p > L_1, k_d > L_2, k_i > 0, [(k_p - L_1)(k_d - L_2) - k_i] > L_2 \sqrt{(k_d + L_2)} \} \quad (13)$$

Entonces para cualquier parámetro a encontrar será: $\forall (k_p, k_i, k_d) \in \Omega_{PID}$ siendo de lazo cerrado; es decir el sistema (8) se retroalimenta de su error para ajustarse al setpoint debiendo satisfacer conforme transcurre el tiempo

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y^*$; $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$ para cualquier valor inicial $[x_1(0), x_2(0)] \in \mathbb{R}^2$ y cualquier constante setpoint $y^* \in \mathbb{R}$.

Restricciones.

Cada valor $k_p > L_1$; $k_d > L_2$ respectivamente y: $[\forall (k_p, k_i, k_d) \in \Omega_{PID} \mid k_i > 0]$; de lo contrario no generaría el algoritmo su parte integral.

Se pueden encontrar una mayor cantidad de parámetros para estabilizar el sistema si se cuenta con mas restricciones en la función[9].

Proposición 1. Sea Ω_{PID} [9] con valores(8) donde se requiere encontrar:

$$\begin{aligned} f \in F_{L_1, L_2} \mid t = \{\phi\} &\rightarrow (\forall f \in F_{L_1, L_2, y^*} \in \mathbb{R}); \\ \exists \Omega_{PID} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y^*; \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0 &\mid \forall [x_1(0), x_2(0)] \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \\ \Omega_{PID} = \{k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}^3 \mid k_p > L_1, k_d > L_2, k_i > 0, (k_d - L_2) - k_i > 0\}. &\quad (14) \end{aligned}$$

Siendo $(y^*, 0)$ el punto de equilibrio del sistema. Definiendo el espacio funcional $F_{L_1, L_2, y^*} \subset C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$ como:

$$f = \left\{ \begin{aligned} &\left(\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right) \mid \frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0, - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^{-1} \det(Df) \leq L_1, \\ &\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^{-1} \text{tr}(Df) \leq L_2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}, f(y^*, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Donde $\det(Df)$ es la determinante de la matriz Jacobiana[11] de f dada por:

$$\det(Df) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Así mismo $\text{tr}(Df)$ es la ruta que genera Df por $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$

Teorema 2. Considere el siguiente sistema no lineal[9] con valores desconocidos:

$$f \in F_{L_1, L_2, y^*} \begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2) + u \end{cases} \quad (17)$$

Donde u es el control Proporcional y Derivativo exclusivamente[9]; $u = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t)$; $e(t) = y^* - x_1(t)$.

Utilizando los valores anteriores (14) se puede definir que:

$$\begin{aligned} \forall f \in F_{L_1, L_2, y^*} &\rightarrow \exists \Omega_{PID} \{ (\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y^*) \wedge (\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0) \} \mid \{x_1(0), x_2(0) \in \mathbb{R}^2\} \\ \leftrightarrow \Omega_{PID} &= \{ (k_p, k_d) \in \mathbb{R}^2 \mid k_p > L_1, k_d > L_2 \} \end{aligned} \quad (18)$$

Corolario 1. Respecto a (14):

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow f'_{L_1, L_2, y^*} = \left\{ f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2) \mid \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \leq L_1, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \leq L_2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}, f_2(y^*, 0) = 0 \right\} \quad (19)$$

Continuando con las descripciones[9], entonces para un sistema de primer orden[9] un control sólo con las partes Proporcional e Integral se define como:

$$F_L = \{ f \in H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \mid |f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|; \forall (x, y) \in \mathbb{R}; \forall t \in \mathbb{R}^+ \} \quad (20)$$

Donde $L > 0$ es una constante y $H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ es el producto cartesiano que define el espacio de las funciones desde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ hasta \mathbb{R} las cuales se son fraccionalmente continuas en la segunda variable t [9].

Proposición 2. En sistema no lineal de primer orden donde $x = f(x, t) + u$ y con valor desconocido dado por: $f \in F_L$ su control Proporcional-Integral Ω_{PI} [9] queda definido como:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(s) ds \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \therefore \forall f \in F_L \wedge \forall y^* \mid f(y^*, t) = \\ f(y^*, 0), \forall t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega_{PI} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y^* \leftrightarrow \Omega_{PD} = \\ \{ (k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2 \mid k_p > L, k_i > 0 \}. \end{aligned} \quad (22)$$

VII. DISEÑO DEL FIRMWARE DE CONTROL Ω_{PID} .

Una vez modelado el Ω_{PID} con sus variables y definidos los parámetros de control continuando con la metodología top-down[3] se diseñó del firmware del microcontrolador.

El sistema comienza declarando las variables de entrada y salida, así como las variables de control correspondientes al modelo matemático.

El sistema sólo permite trabajar si la cisterna se encuentra a un nivel tal que al menos el sensor 1 lo detecta colocando una bandera de control en alto (*Flag*).

El sistema verifica la *Flag* y los sensores a modo de evitar que se quemen las bombas a cada instante (sistema de lazo cerrado) y permitiendo extender su tiempo de vida.

Una vez verificado se procede a hacer una conversión analógica-digital (*CAD*) [12] de las señales de agua (s_1 y s_2) y presión del manómetro del presostato (p_1, p_2) respecto a la resolución (3).

El sistema lee el setpoint del sistema deseado que es el total de salida solicitado por la descarga de agua y aplica el algoritmo general (5) utilizando (8) y (11).

Se procede a convertir el dato de velocidad un pulso modulado[12] que envía la señal en su conversión-digital-analógica (*CAD*) [12] conmuta la salida para activar la velocidad de descarga del motor de cada hidroneumático.

La descarga generará un cambio en las variables de los sensores s_1, s_2 y la presión del manómetro del presostato modificando p_1 y p_2 ; todas las señales son nuevamente leídas y transformadas en la resolución indicada en (3) actualizando las variables de control.

Las variables son procesadas por el PID y comparadas con el error (6) para ajustarse a la y^* deseada del setpoint ajustándose con respecto a (8) y (11) actualizadas.

Paralelamente los leds son activados en cada caso para indicar visualmente el estado del sistema.

El diagrama de flujo de la figura 6 describe el algoritmo PID del microcontrolador PIC.

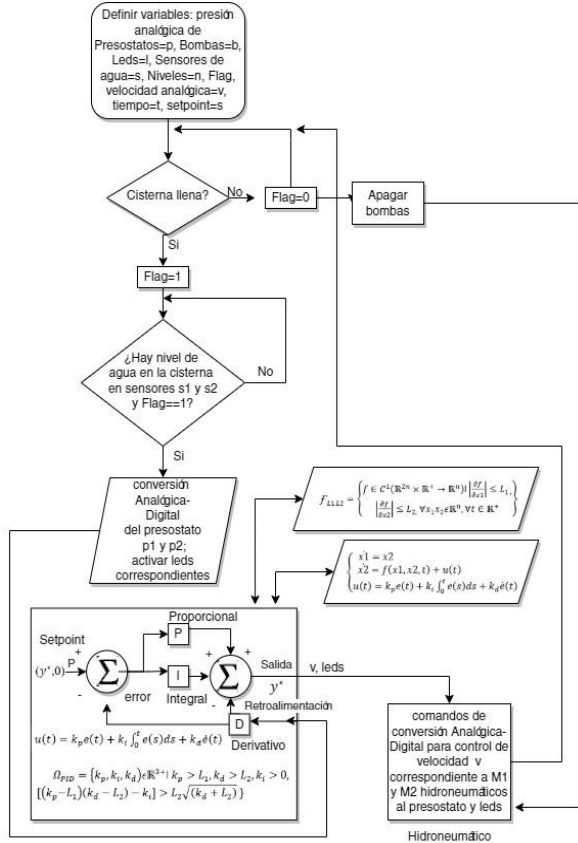


Fig. 6. Diagrama de flujo del sistema de control PID que lee las señales del sistema de sensado, realiza la CAD, procesa y realiza un DAC para brindar una salida analógica potencia.

VIII. CAD/CAM

De acuerdo con los diseños de las figuras 3, 4 y 5 se procedió a diseñar y simular las placas de circuito impreso PCB correspondientes mediante manufactura asistida por computadora CAD/CAM continuando con la propuesta de diseño[2] y la metodología[3] como se muestra en la figura 7.

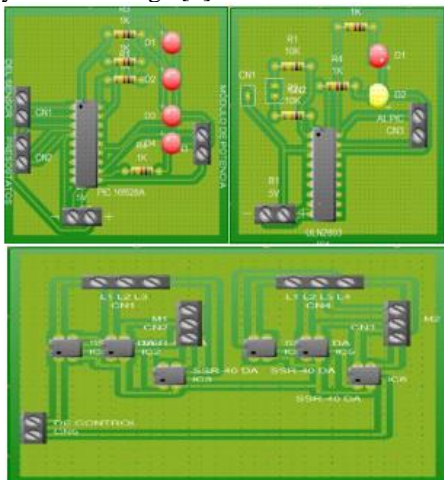


Fig. 7. PCB de los sistemas de control, sensado y potencia

Una vez diseñados de procedió a la optimización de posición y tamaño para su manufactura e integración de los módulos de control y sensado en una sola PCB para realizar

los agujeros de componentes, montado y soldado como se muestra en la figura 8.

El último paso de la metodología top-down [3] permite un prototipo funcional el cuál fue manufacturado para contar con las placas correspondientes y soldar los componentes.

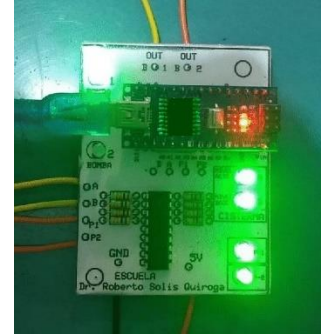


Fig. 8 Módulos de control y sensado en una sola PCB

El módulo de control con los 6 relevadores de estado sólido fue instalado conectado al de control y sensado dotando de un transformador Ac/Dc de 5v para suministrar energía al sistema completo como se muestra en la figura 9.



Fig. 9 Módulo de control-sensado y de potencia instalados.

Así mismo se realizó el cableado ala cisterna para los sensores y se interconectaron las dos bombas de motor trifásico del hidroneumático como se muestra en la figura 10 cumpliendo en su totalidad con la metodología[3].



Fig 10. Conexión a los motores trifásicos.

IX. PRUEBAS

El sistema fue originalmente calibrado en una serie de ajustes para que el setpoint permitiera cumplir con el propósito reconfigurando el valor del setpoint.

El controlador de presurización detuvo los motores durante las pruebas ante la falta de agua en la cisterna.

La velocidad de muestreo fue calibrada a 80 kHz por canal permitiendo leer y transformar los datos en la resolución indicada en (3).

Se realizaron pruebas de trabajo brindando la gráfica de la figura 11, pudiendo observar que en un intervalo de 103 milisegundos (ms) al llegar a los 70 ms el sistema y

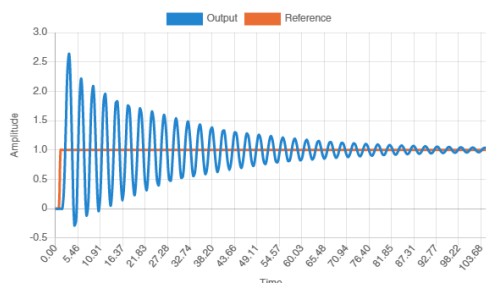


Fig. 11. Comportamiento del sistema en estabilización respecto al tiempo.

oscila entre +1.05 y -0.95 del setpoint el cual equivale a una variación del 2% de la velocidad desdeada siendo imperceptible tendiendo a 0 con respecto al tiempo, por lo que el sistema se va adaptando a una velocidad muy alta de los cambios generados.

Al realizar una descarga y carga de la cisterna se puede observar el cambio en la figura 12 y su tiempo de ajuste.

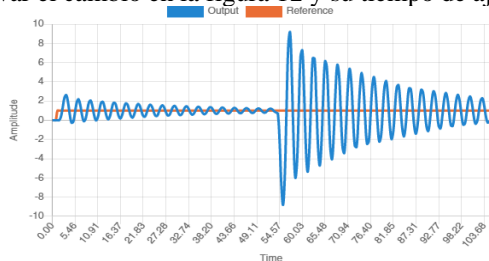


Fig. 12. Ajuste del sistema ante la falta de agua y regreso instantáneo.

X. CONCLUSIONES

El sistema implementado en la escuela primaria Dr. Roberto Solís Quiroga opera actualmente con el sistema hidroneumático PID automatizado, con lo que se ha mejorado la higiene de la comunidad estudiantil ante la pandemia del virus SARS-COV-2[1].

El microcontrolador PIC 16F628A *SMD* permitió diseñar una tarjeta compacta con un algoritmo PID capaz de leer los valores analógicos[12] de presión y nivel de agua para suministrar un pulso modulado[12] de control de velocidad de motores para mandar la presión solicitada de forma anticipada utilizando un algoritmo basado PID que utiliza las descripciones matemáticas (3),(5),(6),(8) y (11) en un código fuente en el firmware.

El microcontrolador envió la señal para que los relevadores de estado sólido pudieran manejar el control trifásico a la velocidad indicada por el mismo.

La metodología de prototipado rápido[2] para hardware mediante CAD/CAM[4] permitió la construcción y verificación rápida del sistema para entregar el sistema lo antes posible a la comunidad estudiantil.

La metodología de diseño top-down [3] permitió el diseño del sistema de forma adecuada a nivel hardware y firmware para la construcción del prototipo funcional.

La metodología WBS[6] permitió descomponer el problema a resolver en módulos de fácil trabajo, siendo compatible con las otras metodologías descritas[3][2] para lograr los tiempos de desarrollo solicitados por la escuela.

El comportamiento del sistema PID descrito en la figura 11 tiende a la lineabilidad con respecto al tiempo y aunque su

velocidad de adaptación es imperceptible en la práctica; en su gráfica nunca llega al valor y^* esperado debido a las perturbaciones del motor o tiempos de conversión *ADC/DAC*, por lo que si se rediseña el mismo sistema con un DSPIC de mayor velocidad se puede lograr un ajuste que tienda al setpoint al contar con módulos especializados[13].

Los tiempos de ajuste ante la falta de agua son mucho mayores debido a la lectura de error y desconexión del presostato en donde se puede apreciar un rebote de señal por ruido pudiéndose refinar la señal mediante filtros capacitivos, pasa altos y pasabajos que ajusten la señal para que llegue con menor perturbación o en código con un DSPIC.

Los sistemas de lazo cerrado con PID tienden a la adaptación con respecto al tiempo permitiendo anticiparse al comportamiento de las señales.

El sistema de control mediante relevadores de estado sólido para un motor trifásico es un diseño mucho más estable y a prueba de fallas respecto a la conmutación cargas ya que no tienen el desgaste electromecánico de los sistemas comerciales clásicos generando una solución poco explotada en artículos de control automático.

REFERENCIAS

- [1] Coronaviridae Study Group of the International Committee on Taxonomy of Viruses.: The species Severe acute respiratory syndrome-related coronavirus: classifying 2019-nCoV and naming it SARS-CoV-2. *Nature Microbiology* 5, pp. 536–544 (2020)
- [2] Project Management Institute.: A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK® Guide) 7th ed. Project Management Institute, pp. 17-79 (2021)
- [3] Mills, Harlen D.: Top-Down Programming in Large Systems. in *Debugging Techniques in Large Systems*. Ed. R.Rustin: Prentice Hall, N.J, pp.41-56 (1971).
- [4] T. Riesgo, Y. Torroja & E. de la Torre.: Design methodologies based on hardware description languages. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, no. 1, pp. 3-12 (1999).
- [5] Fitzgerald, A. E., Kingsley, C., & Umans, S.D.: *Electric Machinery*. McGraw-Hill, pp. 57-84 (2003).
- [6] Project Management Institute.: Practice Standard for Work Breakdown Structures (WBS) –Second Edition (Reaffirmed). Newtown Square, PA: PMI, pp. 78-93 (2020)
- [7] M. Krstic, I. Kanellakopoulos & P.V. Kokotovic.: *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley & Sons, Inc., pp. 57-90 (1995)
- [8] Skiba, Y.: Métodos y esquemas numéricos: un análisis computacional. UNAM, pp.159-160 (2005)
- [9] J. Zhang & L. Guo.: Theory and Design of PID Controller for Nonlinear Uncertain Systems. *IEEE Control Systems Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 643-648 (July, 2019)
- [10] Gue, R.L. & Thomas, M.E.: *Mathematical Methods in Operations Research*. Collier-Macmillan Limited. 3rd ed., pp. 100-125 (1970)
- [11] Lynch, K. & Park, F.C.: *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, pp. 34-72 (2017)
- [12] Breijo, E.B.: C CCS y Simulador PROTEUS para Microcontroladores PIC. Alfaomega-Marcombo pp. 117-125 (2008)
- [13] Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor C.D.: Fajardo-Rendón, M.; Herrera-Armendia, F.G.; Sentíes-Nacaspac M., Villavicencio-Gómez, I.: Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación. *La Enseñanza y Aprendizaje de Las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica*, Vol. 1. Francisco Guillermo Herrera Armendia y Marcos Fajardo Rendón Ed. (Escuela Normal Superior de México). pp.197-197 (2017)

Journal de
Objetos y
Objetivos
*M*atemáticos